UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA "TULLIO LEVI-CIVITA"

Corso di Laurea Magistrale in Matematica

Scoppiamenti e famiglie dominanti non spezzanti di curve razionali su varietà di Fano

Relatrice:
Prof.ssa Carla Novelli

Laureanda:
Marica Turchetto, 1185001

18 Ottobre 2019

Anno Accademico 2018-2019

Indice

Introduzione

Scopo della tesi è descrivere il cono di curve di alcune varietà di Fano (ovvero di varietà proiettive complesse lisce con divisore anticanonico ampio) che ammettono un raggio estremale associato ad uno scoppiamento liscio.

Lo studio delle varietà di Fano risulta fondamentale in Teoria di Mori, dove queste varietà compaiono come fibre generiche delle contrazioni associate ai raggi estremali, o più in generale alle facce estremali (cfr. Definizione 1.1.7), del cono di Kleimann–Mori $\overline{NE}(X)$ (cfr. Capitolo 1.1) di una varietà X proiettiva complessa liscia. Per il Teorema del Cono (Teorema 1.4.2) sappiamo che la parte negativa di $\overline{NE}(X)$ rispetto al divisore canonico K_X della varietà, è localmente poliedrale e nel caso delle varietà di Fano il cono di Kleimann–Mori $\overline{NE}(X)$ è interamente contenuto nel semipiano negativo di $N_1(X)$ rispetto a K_X.
Inoltre il Teorema di Contrazione (Teorema 1.4.3) garantisce che, ad ogni faccia estremale, è associata ad una contrazione.
Ad ogni varietà di Fano possono essere associati alcuni invarianti numerici, come il numero di Picard ρ_X, l'indice r_X e lo pseudoindice i_X (cfr. Definizione 1.1.5 e Capitolo 2.1).

Inizialmente, è stata tentata una classificazione delle varietà di Fano per valori alti di r_X, raggiunta per $r_X = \dim X + 1$ e $r_X = \dim X$ in [15], per $r_X = \dim X - 1$ in [13], per $r_X = \dim X - 2$ in [26] e [20].
Nei casi invece in cui l'indice ha un valore inferiore il problema è stato approciato con strategie differenti, ad esempio assumendo di avere un raggio legato a contrazioni particolari, intuizione seguita in [3].

Un'altra strategia efficace per classificare le varietà di Fano è studiare le famiglie di curve razionali di queste varietà per capire a quali contrazioni sono associati i raggi del cono di Kleimann–Mori ed infine determinare, quando possibile, la varietà corrispondente.
Grazie a due risultati fondamentali ottenuti da Mori in [22] e Kollár in [17],

sappiamo che ogni varietà di Fano ammette famiglie dominanti di curve razionali (Teorema 2.3.1) e famiglie orizzontali rispetto ad una fibrazione (Teorema 2.3.2); pertanto è possibile usare le proprietà di queste famiglie per studiare il cono della varietà.
Per questi motivi richiameremo nei primo Capitolo alcuni risultati generali riguardanti le famiglie di curve razionali (seguendo [16] e [11]), soffermandoci in particolare sulle famiglie non spezzanti e quelle dominanti (cfr. Definizione 1.2.7 e 1.2.8). Utilizzeremo quindi le famiglie Chow per parametrizzare gli 1-cicli (cfr. Definizione 1.3.5) e per definire la connessione razionale (cfr. Definizione 1.3.13) ed enunceremo la Disuguaglianza di Ionescu–Wiśniewski (Teorema 1.4.7) che mette in relazione la lunghezza di un raggio con le dimensioni della fibra e del luogo eccezionale della contrazione ad esso associata.

Per valori alti dello pseudoindice è possibile sfruttare in aggiunta la Congettura di Mukai Generalizzata (cfr. Congettura 2.1.9) che mette in relazione pseudoindice e numero di Picard della varietà. Tale Congettura è stata dimostrata in [31] e [27] nel caso in cui $i_X \geq \frac{\dim X+1}{3}$ e nel caso in cui $i_X = \frac{\dim X}{3}$ richiedendo in aggiunta che la varietà X ammetta una famiglia di curve dominante non spezzante. Per i risultati in [31] si vede che, supponendo $\rho_X \geq 3$, allora dalla Congettura di Mukai Generalizzata ricaviamo $i_X \leq \frac{\dim X+3}{3}$. Pertanto in [28] vengono studiate e classificate le varietà di Fano con $\rho_X \geq 3$ e $i_X \geq \frac{\dim X+2}{3}$. Il caso successivo rispetto allo pseudoindice, ovvero quando $i_X \geq \frac{\dim X+1}{3}$, viene affrontato in [28] in cui si trova una classificazione delle varietà se $\rho_X \geq 4$, oppure se $\rho_X = 3$ e la varietà ammette una famiglia di curve dominante non spezzante. In [29] invece, mantenendo lo stesso valore di i_X, supponendo che $\rho_X \geq 3$ e che la varietà ammetta un raggio associato ad uno scoppiamento liscio, si trova una classificazione di tutti i possibili coni di queste varietà.

Nel caso successivo, ovvero per $i_X = \frac{\dim X}{3}$, troviamo che una varietà di Fano X può ammettere un raggio R_σ associato ad uno scoppiamento liscio sia di lunghezza i_X che di lunghezza $i_X + 1$.
Nelle Sezioni 3.2 e 3.3 studieremo quest'ultimo caso, supponendo quindi di avere una varietà di Fano X con numero di Picard $\rho_X \geq 3$, che ammette un raggio R_σ di lunghezza $i_X + 1$ associato ad uno scoppiamento liscio e per cui esiste una famiglia di curve razionali dominante non spezzante V^1. Divideremo lo studio in due casi a seconda del numero d'intersezione tra la famiglia di curve V^1 ed il luogo eccezionale $Exc(R_\sigma)$ dello scoppiamento associato ad R_σ. In entrambi i casi dimostreremo che il numero di Picard è $\rho_X = 3$ (Proposizione 3.2.4 e Proposizione 3.3.5).

Inizialmente ci occuperemo di studiare il caso in cui la famiglia V^1 sia positiva rispetto al luogo eccezionale $Exc(R_\sigma)$. Con il Teorema 3.2.6 dimostreremo che il cono $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2\rangle$ dove R_1 è un raggio di tipo fibrato che contiene la classe di equivalenza di $[V^1]$ mentre R_2 può essere o anch'esso associato ad una contrazione di tipo fibrato oppure ad uno scoppiamento liscio la cui fibra ha dimensione i_X. Entrambi i casi possono effettivamente verificarsi (come vedremo negli esempi del Capitolo 4).

Tratteremo infine il caso in cui $Exc(R_\sigma)\cdot V^1 = 0$, dimostrando inizialmente che nel cono $NE(X)$ esiste un altro raggio R_τ associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X (Proposizione 3.3.1) e che ci può essere al più un raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato. Mostreremo poi che X è rc(V^1, V^2, V^σ)-connessa, dove V^2 è una famiglia orizzontale rispetto all'rc(V^1)-fibrazione che dimostreremo essere non spezzante (Proposizione 3.3.4). Vedremo inoltre che la varietà X è anche rc(V^1, V^τ, V^σ)-connessa (Teorema 3.3.8), dove V^τ è una famiglia di deformazione di una curva minima di un raggio R_τ associato ad uno scoppiamento liscio tale che $Exc(R_\sigma)\cdot R_\tau > 0$.
Infine, assumendo che X non ammetta raggi estremali associati a contrazioni piccole, dimostreremo che allora $Exc(R_\sigma)\cdot R \geq 0$ per ogni raggio estremale R contenuto in $NE(X)$ (Proposizione 3.3.9), e dimostreremo pertanto che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_\tau\rangle$, dove R_1 è un raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato generato da $[V^1]$ mentre R_τ è associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X (Teorema 3.3.11 e 3.3.12).

Capitolo 1

Definizioni e risultati preliminari

In questa prima parte richiameremo le definizioni ed i risultati utili per le dimostrazioni dei capitoli successivi. Se non diversamente specificato, assumeremo sempre che X sia una varietà proiettiva complessa liscia.

1.1 Divisori, uno-cicli ed equivalenza numerica

Iniziamo riportando le definizioni di divisori, curve ed uno-cicli.

Definizione 1.1.1. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Una sua sottovarietà Z è detta* divisore di Cartier nel punto $z \in Z$ *se può essere definita localmente su z da una singola equazione $h = 0$ con $h \in \mathcal{O}_{X,z}$ funzione regolare non nulla, rappresentata da un polinomio che non divide lo zero nell'anello delle coordinate di X. La sottovarietà Z è detta* divisore di Cartier *se è un divisore di Cartier in ogni suo punto.*

L'insieme dei divisori di Cartier di X forma un gruppo rispetto all'operazione di addizione che indichiamo con $Div(X)$.

Definizione 1.1.2. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia.*
Una curva *su X è l'immagine di un morfismo non costante $f\colon \Gamma \to X$, con Γ varietà proiettiva di dimensione uno con componenti irriducibili lisce. Una curva è detta* razionale *se $\Gamma = \mathbb{P}^1$.*
Un 1-ciclo *su X è una somma formale finita $\sum_{i=1}^{n} a_i \mathcal{C}_i$ con $a_i \in \mathbb{Z}$ e $\mathcal{C}_i$ curve su X.*

L'insieme degli 1-cicli della varietà X forma un gruppo rispetto all'operazione di addizione che indichiamo con $Z_1(X)$.

Il gruppo dei divisori di una varietà e quello degli 1-cicli possono essere quozientati rispetto alla relazione di equivalenza numerica (cfr. Definizione 1.1.3). Il numero di classi rispetto a questa relazione di equivalenza prende il nome di numero di Picard ed assieme al cono di curve, permette di descrivere e classificare le varietà.

Definizione 1.1.3. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Due divisori di Cartier D e D' su X si dicono* numericamente equivalenti $D \equiv D'$ *se hanno lo stesso numero d'intersezione*

$$D \cdot \mathcal{C} = D' \cdot \mathcal{C}$$

su ogni curva $\mathcal{C}$ di X. Indichiamo con $N^1(X)_{\mathbb{Z}}$ il gruppo quoziente dei divisori di Cartier rispetto a questa relazione di equivalenza.

Similmente, due 1-cicli C e C' su X sono numericamente equivalenti $C \equiv C'$ *se hanno lo stesso numero d'intersezione con ogni divisore di Cartier. Indichiamo con $N_1(X)_{\mathbb{Z}}$ il rispettivo gruppo quoziente.*

Poniamo

$$N^1(X)_{\mathbb{R}} := N^1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}$$
$$N_1(X)_{\mathbb{R}} := N_1(X)_{\mathbb{Z}} \otimes \mathbb{R}.$$

Osservazione 1.1.4. Il prodotto d'intersezione induce un pairing non degenere

$$N^1(X)_{\mathbb{R}} \times N_1(X)_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

che rende questi spazi vettoriali canonicamente duali. Inoltre, per il Teorema di Néron-Severi [16, II.4.5], i gruppi $N^1(X)_{\mathbb{R}}$ e $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ sono spazi vettoriale finito dimensionali e della stessa dimensione.

Definizione 1.1.5. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Il numero $\rho_X := \dim_{\mathbb{R}} N^1(X)_{\mathbb{R}} = \dim_{\mathbb{R}} N_1(X)_{\mathbb{R}}$ si dice* numero di Picard *di X.*

All'interno di $N_1(X)_{\mathbb{R}}$ consideriamo il cono convesso generato dalle classi degli 1-cicli effettivi

$$NE(X) = \left\{ C \in N_1(X) \mid C = \sum a_i \mathcal{C}_i \text{ con } a_i \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ e } \mathcal{C}_i \text{ curve irriducibili} \right\}$$

che è detto *cono delle curve* di X ed il cono

$$\overline{NE}(X) := \text{ chiusura di } NE(X) \text{ in } N_1(X)_{\mathbb{R}}$$

che è detto *cono di Kleimann–Mori* di X.

Notazione 1.1.6. Sia ora $Y \subset X$ sottoinsieme di una varietà X proiettiva complessa liscia. Indichiamo con $N_1(Y,X)_{\mathbb{R}} \subseteq N_1(X)_{\mathbb{R}}$ il sottospazio vettoriale generato dalle classi di equivalenza numerica delle curve di X contenute in Y, e $NE(Y,X) \subseteq NE(X)$ il sottocono generato dalla classe di equivalenza numerica delle curve di X contenute in Y.
Data una curva C o un 1-ciclo Γ, indicheremo con $[C]$ e $[\Gamma]$ rispettivamente la loro classe di equivalenza numerica.

Definizione 1.1.7. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Una* faccia estremale *di $\overline{NE}(X)$ è un sottocono $M \subset \overline{NE}(X)$ tale che per ogni $a, b \in \overline{NE}(X)$ la cui somma $a + b \in M$, si ha che $a, b \in M$. Se M ha dimensione* 1 *allora prende il nome di* raggio estremale.

Notazione 1.1.8. Siano X una varietà proiettiva complessa liscia, D un divisore di Cartier su X ed S un sottoinsieme di $N_1(X)_{\mathbb{R}}$. Poniamo

$$S_{D\geq 0} := \{z \in S \mid D \cdot z \geq 0\}$$

ed in maniera analoga definiamo $S_{D\leq 0}$, $S_{D>0}$ e $S_{D<0}$.

1.2 Famiglie di curve razionali

In questa sezione ci occuperemo di parametrizzare le curve razionali di una varietà X proiettiva complessa liscia. A tal scopo adatteremo la definizione generale di famiglia proiettiva $f\colon \chi \to S$, per ottenere quella di famiglia di curve razionali. Seguiremo le notazioni di [11] e [16].

Richiamiamo inizialmente la definizione di morfismo piatto.

Definizione 1.2.1. *[14] Sia $f\colon X \to Y$ un morfismo tra due varietà proiettive complesse lisce. Se la mappa dei germi*

$$f_x\colon \mathcal{O}_{Y,f(x)} \to \mathcal{O}_{X,x}$$

rende $\mathcal{O}_{X,x}$ piatto come $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-modulo per ogni punto $x \in X$, diremo che f è un morfismo piatto.

Definiamo quindi le famiglie di varietà proiettive come particolari morfismi piatti.

Definizione 1.2.2. *Una* famiglia di varietà proiettive *è un morfismo piatto tra due varietà proiettive $f\colon \chi \to S$, i cui membri sono le fibre di f. Chiameremo* spazio totale *la varietà χ e* spazio dei parametri *la varietà S.*

Definizione 1.2.3. *Siano S una varietà proiettiva e χ una sottovarietà chiusa del prodotto $\mathbb{P}^n \times S$. Una* famiglia di sottovarietà chiuse di $\mathbb{P}^n$ *è una famiglia proiettiva $f\colon \chi \to S$ che rende commutativo il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} \chi \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{P}^n \times S \arrow[d, "\pi_2"] \\ & S \end{tikzcd}$$

in cui π_2 è la proiezione sulla seconda componente.
Se F è una fibra di f, allora diremo che f è una famiglia di deformazione *di $F \subset \mathbb{P}^n$.*

La richiesta che f sia un morfismo piatto permette di avere tutte fibre della stessa dimensione. Se supponiamo inoltre che la varietà S sia ridotta, richiedere che f sia piatto è equivalente a richiedere che le fibre di f abbiano tutte lo stesso polinomio di Hilbert [11].

Sia ora $f\colon \chi \to S$ una famiglia di sottovarietà chiuse di $\mathbb{P}^n$ e supponiamo di avere un morfismo di varietà $\psi\colon V \to S$. Partendo dal pullback

$$\begin{tikzcd} \chi \times_S V \arrow[r, "\psi^*(f)"] \arrow[d, "f^*(\psi)"'] & V \arrow[d, "\psi"] \\ \chi \arrow[r, "f"] & S \end{tikzcd}$$

possiamo costruire una nuova famiglia di sottovarietà

$$\begin{tikzcd} \chi \times_S V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\psi^*(f)"'] & \mathbb{P}^n \times V \arrow[d] \\ & V \end{tikzcd} .$$

Ci chiediamo quindi se, ponendo alcune condizioni su V, sia possibile trovare trovare una famiglia di sottovarietà da cui poter ricavare tutte le altre tramite pullback.

Definizione 1.2.4. *Fissato un naturale n ed un polinomio di Hilbert $p(T)$, supponiamo di avere un diagramma commutativo*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f_u"'] & \mathbb{P}^n \times \mathcal{H}^n_{p(T)} \arrow[d] \\ & \mathcal{H}^n_{p(T)} \end{tikzcd}$$

tale che ogni altra famiglia di sottovarietà chiuse di $\mathbb{P}^n$, le cui fibre abbiano polinomio di Hilbert uguale a $p(T)$, possa essere ottenuta come pullback di f_u tramite un unico morfismo ψ che rende commutativo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} \times_{\mathcal{H}} S \arrow[r, "\psi^*(f_u)"] \arrow[d, "f_u^*(\psi)"'] & S \arrow[d, "\psi"] \\ \mathcal{U} \arrow[r, "f_u"] & \mathcal{H}^n_{p(T)} \end{tikzcd} .$$

Allora $\mathcal{H}^n_{p(T)}$ prende il nome di schema di Hilbert *e f_u (ed anche $\mathcal{U}$) quello di* famiglia universale*.*

Nel caso delle famiglie di curve, che è il caso che andremo a considerare, lo schema di Hilbert e la famiglia universale esistono sempre per il Teorema [11, Theorem 5.1].

Fin'ora abbiamo considerato solo famiglie di sottovarietà chiuse di $\mathbb{P}^n$, ma possiamo generalizzare quanto visto per definire famiglie di sottovarietà chiuse per varietà proiettive complesse lisce.

Definizione 1.2.5. *Sia $X \subset \mathbb{P}^n$ una sottavarietà proiettiva complessa liscia. Una* famiglia di sottovarietà chiuse di X *è un morfismo piatto $f\colon \chi \to S$ che rende commutativo il seguente diagramma*

$$\begin{tikzcd} \chi \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f"'] & X \times S \arrow[d, "\pi_2"] \\ & S \end{tikzcd}$$

con χ sottovarietà chiusa del prodotto $X \times S$.

Anche in questo caso è possibile costruire lo schema di Hilbert, come dimostrato in [16, Chapter I.1].

Definiamo ora nella specifico una famiglia di curve razionali, ovvero una famiglia le cui fibre siano tutte curve birazionali a $\mathbb{P}^1$, che sarà l'oggetto con cui andremo a lavorare.
Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Per definire una famiglia di curve razionali su X iniziamo considerando lo schema $Hom(\mathbb{P}^1, X)$ che parametrizza i morfismi $f\colon \mathbb{P}^1 \to X$. Al fine di escludere i morfismi costanti, ci restringiamo al sottoschema $Hom_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \subset Hom(\mathbb{P}^1, X)$ (ovvero consideriamo solo morfismi birazionali sull'immagine) e di questo schema prendiamo la normalizzazione $Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$. Inoltre siccome vogliamo identificare le

curve che hanno lo stesso supporto anche se con parametrizzazioni differenti, definiamo lo spazio dei parametri $Ratcurves^n(X)$ come il quoziente del gruppo $Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ rispetto all'azione degli automorfismi $Aut\ \mathbb{P}^1(X)$. Otteniamo quindi il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{tikzcd} Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1 \arrow[r, "U_X"] \arrow[d] & Univ(X) \arrow[d, "\pi"] \\ Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \arrow[r, "u_X"] & Ratcurves^n(X) \end{tikzcd}$$

dove U_X e u_X sono rispettivamente la mappa quoziente di $Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1$ e $Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X)$ rispetto all'azione di $Aut\ \mathbb{P}^1(X)$, mentre π è un $\mathbb{P}^1$-fibrato. Si può dimostrare [16, cfr. II.2.15 e II.2.16] che la famiglia $Univ(X)$ così ottenuta è effettivamente la famiglia universale di $Ratcurves^n(X)$.

Definizione 1.2.6. *Una* famiglia di curve razionali *V su una varietà X proiettiva complessa liscia è una componente irriducibile di $Ratcurves^n(X)$. Data una curva razionale $\mathcal{C}\colon \mathbb{P}^1 \to X$, una qualsiasi componente irriducibile V contenuta in $Ratcurves^n(X)$ che contiene la classe di equivalenza di $\mathcal{C}$, prende il nome di* famiglia di deformazione *di $\mathcal{C}$.*

Data una famiglia V di curve razionali possiamo costruire il seguente diagramma:

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(V) =: \mathcal{U} \arrow[r, "i"] \arrow[d, "p"] & X \\ V & \end{tikzcd}$$

in cui p è un $\mathbb{P}^1$-fibrato per il Teorema [16, Theorem II.2.8], $\mathcal{U}$ è la famiglia universale di V contenuta in $\mathrm{Univ}(X)$ ed i è la mappa indotta dalla funzione di valutazione $ev\colon Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1 \to X$.

Tra le varie famiglie di curve razionali di una varietà X proiettiva complessa liscia, assumono particolare importanza le famiglie con "buone" proprietà che richiamiamo nelle definizioni seguenti.

Definizione 1.2.7. *[16, IV.2.1] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Una famiglia di curve razionali V su X è* propria *se il morfismo $f\colon V \to \mathbb{C}$ è proprio, ovvero se è separato, di tipo finito e (universalmente) chiuso. Se V è una famiglia propria diremo che V è una famiglia* non spezzante.

Definizione 1.2.8. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Indicheremo con* Locus(V) *l'insieme dei punti di X per cui passa una curva parametrizzata da V. Inoltre diremo che V è*

- *una* famiglia dominante *se* $\overline{Locus(V)} = X$
- *una* famiglia coprente *se* $Locus(V) = X$.

Osserviamo che una famiglia dominante non spezzante è anche coprente.

Notazione 1.2.9. Se L è un fibrato di rette e V una famiglia di curve razionali, indicheremo con $L \cdot V$ il numero d'intersezione $L \cdot C$, dove C è una qualsiasi curva tra quelle parametrizzate da V.
Sia ora $x \in X$ un punto di una varietà proiettiva complessa liscia e V una famiglia di curve razionali su X. Indichiamo con V_x il sottoschema di V che parametrizza le curve razionali di V passanti per x e con $Locus(V_x)$ l'insieme di punti di X per cui passa una curva parametrizzata da V_x.

Definizione 1.2.10. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, V una famiglia di curve razionali su X e $x \in Locus(V)$ un punto generico. Se il sottoschema V_x è proprio la famiglia di curve V si dice* localmente non spezzante.

Se una varietà X proiettiva complessa liscia ammette famiglie di curve razionali dominanti, possiamo fissare un fibrato lineare L e scegliere una famiglia dominante minimale rispetto all'intersezione con L. Una tale famiglia è localmente non spezzante.
Infatti se V è una famiglia dominante minimale e supponiamo per assurdo che esista un punto generico $x \in Locus(V)$ tale che la famiglia V_x sia spezzante, allora esiste una curva razionale Γ passante per x tale che $L \cdot \Gamma < L \cdot V$. Ma allora abbiamo trovato una famiglia di curve razionali il cui grado è strettamente minore del grado di V, e questo è assurdo in quanto avevamo scelto V minima rispetto a questa proprietà.

Poiché nei prossimi Capitoli lavoreremo con contrazioni estremali (cfr. Definizione 1.4.4) saremo interessati a sapere come si comportano questi morfismi suriettivi sulle famiglie di curve razionali. Definiamo quindi un tipo di famiglia che ci sarà particolarmente utile nelle considerazioni dei prossimi Capitoli.

Definizione 1.2.11. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia ed U un sottoinsieme aperto denso e consideriamo $\pi\colon U \to Z$ un morfismo proprio e suriettivo su una varietà quasi proiettiva. Una famiglia di curve razionali V*

è detta famiglia orizzontale dominante *rispetto a π se $Locus(V)$ domina Z e le curve parametrizzate da V non sono contratte da π.*

Se tali famiglie esistono, allora ne possiamo scegliere una con intersezione minima rispetto ad un fibrato lineare fissato.

1.3 Catene di curve razionali

Similmente a quanto fatto per le famiglie di curve razionali, ci occuperemo ora di parametrizzare i cicli algebrici di una varietà X proiettiva complessa liscia. Per farlo useremo le varietà Chow.

Iniziamo con la definizione di ciclo algebrico su una varietà X proiettiva complessa liscia:

Definizione 1.3.1. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Un* ciclo algebrico di dimensione *d su X è una combinazione lineare formale $\sum a_i[V_i]$ in cui la somma è finita, i coefficienti a_i sono interi ed i V_i sono sottovarietà proprie, ridotte ed irriducibili di X aventi dimensione d. Un ciclo è detto* effettivo *se tutti i coefficienti a_i sono non negativi.*

L'insieme dei cicli di dimensione d di una varietà X proiettiva complessa liscia forma un gruppo rispetto all'operazione di addizione che indichiamo con $Z_d(X)$.

Sia $f : X \to Y$ un morfismo trà varietà proiettive complesse lisce e sia $\sum a_i[V_i]$ un ciclo algebrico su X. Indichiamo con $W_i \subset Y$ la chiusura di $f(V_i)$ e sia $deg(V_i/W_i)$ il grado di $V_i \to W_i$ se f è genericamente finito, zero altrimenti. Allora

$$f_*\left(\sum a_i[V_i]\right) := \sum a_i deg(V_i/W_i)[W_i]$$

è un ciclo algebrico su Y e $f_* : Z_d(X) \to Z_d(Y)$ è il *push-forward* del ciclo. In maniera analoga, se $f : X \to Y$ è un morfismo piatto e $\sum a_i[V_i]$ è un ciclo algebrico su Y possiamo considerare *pull-back piatto* di cicli

$$f^*\left(\sum a_i[V_i]\right) := \sum a_i[f^{-1}(V_i)].$$

I cicli algebrici di una varietà proiettiva complessa liscia possono essere parametrizzati tramite le varietà Chow. Iniziamo costruendo la varietà Chow per una curva irriducibile contenuta in $\mathbb{P}^3$ e poi generalizzeremo la costruzione

per poter parametrizzare 1-cicli di una varietà proiettiva complessa liscia X. Sia dunque $\mathcal{C}$ una curva irriducibile di grado r contenuta in $\mathbb{P}^3$. Consideriamo l'insieme $V(\mathcal{C}) \subset (\mathbb{P}^3)^* \times (\mathbb{P}^3)^*$ di tutte le coppie di piani (π, π') che abbiano intersezione non vuota con la curva $\mathcal{C}$. Notiamo che $V(\mathcal{C})$ è una sottovarietà di dimensione 5 in $(\mathbb{P}^3)^* \times (\mathbb{P}^3)^*$, ed è quindi definita da un polinomio $f_{\mathcal{C}}(u, v)$ biomogeneo nelle variabili $u = (u_0, \ldots, u_3)$ e $v = (v_0, \ldots, v_3)$ di grado r. Tale polinomio è determinato da $\mathcal{C}$, a meno di moltiplicazione per uno scalare, e prende il nome di *forma Chow di* $\mathcal{C}$.
Ad ogni curva $\mathcal{C}$ possiamo quindi associare il punto

$$[f_{\mathcal{C}}(u, v)] \in \mathbb{P}(S(r, 4, 4))$$

dove con $S(r, 4, 4)$ indichiamo lo spazio vettoriale di polinomi biomogenei di bigrado (r, r) nell'insieme di variabili u e v. Chiamiamo $[f_{\mathcal{C}}(u, v)]$ il *punto Chow di* $\mathcal{C}$.
Possiamo quindi effettuare una prima generalizzazione prendendo al posto di una curva $\mathcal{C}$ un ciclo algebrico effettivo di dimensione 1 in $\mathbb{P}^3$, ovvero una somma formale a coefficienti positivi $\sum_i a_i \mathcal{C}_i$ con $\mathcal{C}_i$ curve irriducibili di $\mathbb{P}^3$. Definiamo la forma Chow del ciclo come $f_C = \prod f_{\mathcal{C}_i}^{a_i}$ ed il punto Chow come $[f_C]$. Notiamo che la mappa

$$\{\text{cicli algebrici effettivi}\} \to \{\text{punti di } \mathbb{P}(S(r, 4, 4))\},$$

è iniettiva, pertanto due cicli distinti hanno una forma Chow non proporzionale.
Questa costruzione può essere generalizzata per descrivere cicli algebrici di grado r e dimensione d in $\mathbb{P}^n$. Infatti se $Z \subset \mathbb{P}^n$ è una sottovarietà di dimensione d allora l'insieme delle $(d+1)$-uple di iperpiani $H_0, \ldots, H_d$ tali che $Z \cap H_0 \cap \cdots \cap H_d \neq \emptyset$ è un divisore nello spazio duale $(\mathbb{P}^*)^{d+1}$ ed è possibile costruire una mappa biettiva

$$\{\text{cicli di dimensione } d\} \to \{\text{divisori di Cartier in } (\mathbb{P}^*)^{d+1}\}$$

come dimostrato in [16, I.3.23 e I.3.24]

Definizione 1.3.2. *Indicato con $S(r, n+1, \ldots, n+1)$ lo spazio di polinomi pluriomogenei di multigrado r in $d+1$ insiemi di $n+1$ variabili la sottovarietà*

$$Chow(r, d, n) \subset \mathbb{P}(S(r, n+1, \ldots, n+1))$$

che parametrizza i cicli algebrici le cui componenti hanno grado r e dimensione d in $\mathbb{P}^n$ prende il nome di varietà Chow.

Esempio 1.3.3. *[11, Example 2.1] Le varietà di Chow possono essere pensate come una generalizzazione delle varietà Grassmaniane. Infatti è possibile dimostrare che la varietà* $Chow(1, d, n)$ *è isomorfa a* $G(d, n)$.

Come mostrato in [16, I.3] possiamo pensare la varietà $Chow(r, d, n)$ come lo spazio dei parametri rispetto ad una famiglia ben definita di cicli algebrici

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr, "u"'] & \mathbb{P}^n \times Chow(r,d,n) \arrow[d] \\ & Chow(r,d,n) \end{tikzcd}$$

ovvero una famiglia di sottovarietà chiuse di $\mathbb{P}^n$ le cui fibre sono appunto cicli algebrici le cui componenti hanno dimensione d e grado r. Da questa definizione tramite famiglie proiettive è possibile ricavare la definizione di varietà Chow anche per una varietà X proiettiva complessa liscia.

Definizione 1.3.4. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia contenuta in $\mathbb{P}^n$ e sia $Chow(X)_{d,r}$ l'insieme dei punti $z \in Chow(r, d, n)$ tali che $u^{-1}(z) \subset X \times z$, ovvero per cui si abbia una famiglia ben definita di cicli algebrici con componenti di dimensione d e grado r*

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] \arrow[dr, "u"'] & X \times Chow(X)_{d,r} \arrow[d] \\ & Chow(X)_{d,r} \end{tikzcd} .$$

Definiamo Chow(X) *come l'unione disgiunta delle varietà $Chow(X)_{d,r}$ al variare dei valori di d ed r.*

Noi considereremo solo le famiglie Chow che parametrizzano 1-cicli di varietà X proiettive complesse lisce.

Definizione 1.3.5. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Una* famiglia Chow $\mathcal{W}$ *di 1-cicli razionali su X è una componente irriducibile di Chow(X) che parametrizza 1-cicli razionali e connessi.*

In maniera analoga a quanto fatto per le famiglie di curve razionali, data una famiglia Chow $\mathcal{W} \in Chow(X)$, definiamo *Locus($\mathcal{W}$)* come l'insieme dei punti di X per i quali passa un ciclo tra quelli parametrizzati da $\mathcal{W}$. Grazie al Lemma 2.3 in [16, II] sappiamo che Locus($\mathcal{W}$) è chiuso in X. Una famiglia Chow di 1-cicli razionali $\mathcal{W}$ prende il nome di *famiglia coprente* se Locus($\mathcal{W}$)=X.

Sia ora V una famiglia di curve razionali, indichiamo con $\mathcal{V}$ la famiglia Chow associata a V. Osserviamo che, se V è propria, allora corrisponde alla normalizzazione della famiglia Chow associata a $\mathcal{V}$.

Definizione 1.3.6. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Una famiglia di curve razionali V su X (ed anche la famiglia Chow associata $\mathcal{V}$) è una famiglia* quasi non spezzante *se ogni componente di un qualsiasi ciclo riducibile parametrizzato da $\mathcal{V}$ ha una classe numerica proporzionale alla classe numerica di una curva parametrizzata da V. Inoltre, se $V^1,\dots,V^k$ sono famiglie di curve razionali quasi non spezzanti, tali che* $\dim\left\langle [V^1],\dots,[V^k]\right\rangle = k$ *in $N_1(X)_{\mathbb{R}}$, diremo che tali famiglie sono* numericamente indipendenti.

Definizione 1.3.7. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, $Y \subset X$ un sottoinsieme chiuso e siano V^1,…,V^k famiglie di curve razionali su X. Definiamo il* $\mathrm{Locus}(V^1)_Y$ *come l'insieme dei punti $x \in X$ tali che esiste una curva $\mathcal{C}$, tra quelle parametrizzate da V^1, tale che $x \in \mathcal{C}$ e $\mathcal{C} \cap Y \neq \emptyset$. Definiamo induttivamente* $\mathrm{Locus}(V^1,\dots,V^k)_Y{:=}\mathrm{Locus}(V^2,\dots,V^k)_{Locus(V^1)_Y}$. *In modo analogo se consideriamo le famiglie Chow di 1-cicli $\mathcal{W}^1$,…,$\mathcal{W}^k$, possiamo definire* $\mathrm{Locus}(\mathcal{W}^1,\dots,\mathcal{W}^k)_Y$.

Osservazione 1.3.8. Sia X una varietà complessa liscia, Y un suo sottoinsieme chiuso e V una famiglia di curve razionali su X. Siccome $\mathrm{Locus}(V)_Y$ è l'insieme dei punti di X che possono essere raggiunti partendo da un punto di Y e muovendosi lungo le curve di V, allora abbiamo che

- $\mathrm{Locus}(V)_x = \mathrm{Locus}(V_x)$, per $x \in X$;
- $\mathrm{Locus}(V)_Y \neq \emptyset$ se, e solo se $V \cap Y \neq \emptyset$.

Proposizione 1.3.9. *[16, IV.2.6] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, V una famiglia di curve razionali su X e sia $x \in Locus(V)$ un punto tale che ogni componente di V_x è propria. Allora*

- $\dim \mathrm{Locus}(V) + \dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq \dim X - K_X \cdot V - 1$;
- $\dim \mathrm{Locus}(V_x) \geq -K_X \cdot V - 1$.

Osservazione 1.3.10. Se vale l'uguaglianza $\dim Locus(V_x) = -K_X \cdot V - 1$, allora $\dim Locus(V) \geq \dim X$ e quindi V è una famiglia dominante.

Lemma 1.3.11. *[1, Lemma 5.4.c] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, $Y \subset X$ un sottoinsieme chiuso e siano V^1,…,V^k famiglie di curve razionali non spezzanti e numericamente indipendenti tali che l'intersezione*

$\langle [V^1], \dots, [V^k] \rangle \cap NE(Y, X) = 0$.
Allora o $\mathrm{Locus}(V^1, \dots, V^k)_Y = \emptyset$ *o*

$$\dim \mathrm{Locus}(V^1, \dots, V^k)_Y \geq \dim Y + \sum -K_X \cdot V^i - k.$$

Definizione 1.3.12. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, $Y \subset X$ un sottoinsieme chiuso, V una famiglia di curve razionali dominante su X e $\mathcal{V}$ la famiglia Chow associata. Definiamo* $\mathrm{ChLocus}(\mathcal{V})_Y$ *come l'insieme di punti $x \in X$ tali che esista un $m \in \mathbb{N}$ e dei cicli $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, con le seguenti proprietà:*

- *Γ_i appartiene alla famiglia $\mathcal{V}$ per ogni i;*
- *$\Gamma_i \cap \Gamma_{i+1} \neq \emptyset$;*
- *$\Gamma_1 \cap Y \neq \emptyset$ e $x \in \Gamma_m$;*

i.e. *ChLocus$(\mathcal{V})_Y$ è l'insieme dei punti che possono essere uniti ad Y con una catena connessa di al più m cicli appartenenti alla famiglia $\mathcal{V}$.*

Possiamo definire una *relazione di connessione razionale* rispetto alla famiglia $\mathcal{V}$ su una varietà X proiettiva complessa liscia nel seguente modo:

Definizione 1.3.13. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Due punti x e y di X sono in* $\mathrm{rc}(\mathcal{V})$-relazione *se esiste una catena di cicli di $\mathcal{V}$ che unisce tali punti,* i.e. *se $y \in \mathrm{ChLocus}(\mathcal{V})_x$. In particolare X è rc($\mathcal{V}$)-connessa se $X = \mathrm{ChLocus}(\mathcal{V})_x$.*

La famiglia Chow $\mathcal{V}$ definisce una prerelazione nel senso seguente:

Definizione 1.3.14. *Siano U, V e X schemi. La collezione di schemi e morfismi*

$$U \xrightarrow{s} V \xrightarrow{\sigma} U \xrightarrow{w} X$$

tali che $s \circ \sigma = id_V$ prende il nome di prerelazione.
Una prerelazione è propria *se s, w e $w \circ \sigma$ sono morfismi propri.*

Nel nostro caso abbiamo che

$$\begin{array}{ccc} Univ(X) \supset \mathcal{U} & \xrightarrow{\ i\ } & X \\ \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ V & & \end{array}$$

dove i è la valutazione nella varietà e π è il $\mathbb{P}^1$-fibrato del diagramma

$$\begin{array}{ccc} Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) \times \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{U_X} & Univ(X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ Hom^n_{bir}(\mathbb{P}^1, X) & \xrightarrow{u_X} & RatCurves^n(X) \end{array} .$$

Se X è una varietà proiettiva complessa liscia e $V^1, \ldots, V^k$ sono famiglie non spezzanti di curve razionali su X possiamo definire una relazione di connessione razionale rispetto a $V^1, \ldots, V^k$ nel modo seguente: dati due punti x, y di X diremo che sono in rc$(V^1, \ldots, V^k)$-relazione se esiste una catena di curve razionali contenute in $V^1, \ldots, V^k$ che collega x con y, ovvero $y \in ChLocus(V^1, \ldots, V^k)_x$. A questa rc-relazione possiamo associare la fibrazione corrispondente, detta *rc($\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$)-fibrazione.*

Teorema 1.3.15. *[16, IV.4.16] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia e sia $\mathcal{V}$ una prerelazione propria. Allora esiste una sottovarietà aperta $X^0 \subset X$ ed un morfismo proprio $\pi : X^0 \to Z^0$ con fibre connesse tali che:*

- *$\langle \mathcal{V} \rangle$ è una relazione di equivalenza su X^0;*
- *$\pi^{-1}(z)$ è una $\mathcal{V}$-classe di equivalenza per ogni $z \in Z$;*
- *per ogni $z \in Z^0$ e per ogni x,$y \in \pi^{-1}(z)$ abbiamo che $x \in \mathrm{ChLocus}(\mathcal{V})_y$ con $m \leq 2^{\dim X - \dim Z^0} - 1$*

dove m è la lunghezza della catena di cicli definita in 1.3.12.

Osserviamo che X è rc$(\mathcal{V})$-connesso se, e solo se $\dim Z^0 = 0$.

Notazione 1.3.16. Da ora in poi scriveremo Locus$(V^\alpha, \ldots, V^\beta)_{x_\alpha}$ sottointendendo che x_α sia un punto generico di *Locus*(V^α), se non diversamente specificato.
Se $\mathcal{V}$ è una famiglia non spezzante la indicheremo semplicemente con V.

Notazione 1.3.17. Sia S un sottoinsieme di una varietà proiettiva complessa liscia X. Scriveremo $N_1(S)_\mathbb{R} = \langle V^1, \ldots, V^k \rangle$ se ogni curva $\mathcal{C} \subset S$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti razionali $\sum_i a_i[\mathcal{C}_i]$ con $\mathcal{C}_i$ curve contenute nelle famiglie V^i. Se tutti i coefficienti sono $a_i \geq 0$ allora scriveremo $NE(S) = \langle V^1, \ldots, V^k \rangle$

Concludiamo il paragrafo con alcuni risultati che permettono di caratterizzare le curve contenute in *Locus*$(V^1, \ldots, V^k)_Y$ dove Y è un sottoinsieme chiuso di una varietà X proiettiva complessa liscia e $V^1, \ldots, V^k$ sono famiglie di curve razionali su X. In particolare vedremo che ogni curva contenuta in *Locus*$(V^1, \ldots, V^k)_Y$ può essere scritta come combinazione a coefficienti razionali di una curva $\mathcal{C}_Y \subset Y$ e di curve le cui classi di equivalenza sono contenute nelle classi $[V^1], \dots, [V^k]$. Inoltre, sotto opportune ipotesi, è possibile determinare anche il segno di tali coefficienti.

Lemma 1.3.18. *[1, Lemma 4.1] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, $Y \subset X$ un sottoinsieme chiuso e $\mathcal{V}$ una famiglia di Chow di 1-cicli razionali su X. Allora ogni curva contenuta in $Locus(\mathcal{V})_Y$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti razionali di una curva contenuta in Y e di componenti irriducibili di cicli parametrizzati da $\mathcal{V}$ che intersecano Y.*

Corollario 1.3.19. *[1, Corollary 2.12] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Sia V^1 una famiglia di curve razionali localmente non spezzante e siano $V^2, \dots, V^k$ famiglie di curve razionali non spezzanti. Allora, se $x \in Locus(V^1)$ è un punto generico*

i. $N_1(Locus(V^1)_x, X)_{\mathbb{R}} = \langle [V^1] \rangle$;

ii. o $Locus(V^1, \dots, V^k)_x = \emptyset$ *oppure*
$N_1(Locus(V^1, \dots, V^k)_x, X)_{\mathbb{R}} = \langle [V^1], \dots, [V^k] \rangle$.

Lemma 1.3.20. *[32, Lemma 3.2 e Remark 3.4] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, sia $Y \subset X$ un sottoinsieme chiuso e si V una famiglia di curve razionali quasi non spezzanti. Allora ogni curva contenuta in $ChLocus(\mathcal{V})_Y$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti razionali*

$$\lambda_V \mathcal{C}_V + \lambda_Y \mathcal{C}_Y$$

in cui $\mathcal{C}_V$ è una curva tra quelle parametrizzate da V, $\mathcal{C}_Y$ è una curva in Y e $\lambda_Y \geq 0$.

Corollario 1.3.21. *[32, Corollary 3.4] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia e siano $V^1, \dots, V^k$ famiglie di curve razionali non spezzanti tali che $Locus(V^1, \dots, V^k)_x \neq \emptyset$. Allora ogni curva contenuta in $Locus(V^1, \dots, V^k)_x$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti razionali di curve contenute in $V^1, \dots, V^k$.*

Corollario 1.3.22. *[1, Corollary 5.2][8, Corollarary 2.2 e Remark 2.3] Sia R un raggio estremale di una varietà X proiettiva complessa liscia, V^R una famiglia di deformazione di una curva minima di R e V una famiglia di curve razionali non spezzante indipendente da V^R. Allora ogni curva contenuta in $Locus(V^R, V)_x = Locus(V)_{Locus(V^R)_x}$ è numericamente equivalente ad una combinazione a coefficienti razionali*

$$\lambda_V \mathcal{C}_V + \lambda_{V^R} \mathcal{C}_{V^R}$$

in cui $\mathcal{C}_V$ *è una curva tra quelle parametrizzate da* V*,* $\mathcal{C}_{V^R}$ *è una curva in* R *ed entrambi i coefficienti* $\lambda_V, \lambda_{V^R} \geq 0$*.*
Più in generale, se π *è la contrazione associata ad una faccia estremale del cono* $NE(X)$*,* F *una fibra di* π *e* V *una famiglia di curve razionali non spezzante indipendente dalla faccia estremale, allora*

$$NE(Locus(V)_F) = \langle \pi, [V] \rangle \, .$$

1.4 Morfismi e contrazioni estremali

In questo paragrafo richiameremo alcuni risultati fondamentali riguardanti i raggi estremali e le contrazioni ad essi associate, tra cui il Teorema del Cono ed il Teorema di Contrazione.

Iniziamo considerando alcune curve particolari all'interno del cono di Kleimann–Mori $\overline{NE}(X)$ di una varietà proiettiva complessa liscia X.

Definizione 1.4.1. *Sia* X *una varietà proiettiva complessa liscia. Una curva* $\mathcal{C}$ *su* X *la cui normalizzazione è* $\mathbb{P}^1$ *prende il nome di* curva estremale *se*

i. $\mathbb{R}^+[\mathcal{C}] := \{D \in NE(X) \mid D \equiv \lambda\mathcal{C}, \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ *è un raggio estremale di* X*;*

ii. $-K_X \cdot \mathcal{C} \leq \dim X + 1$*.*

Ogni raggio estremale nel cono di Kleimann–Mori di X è generato da dalla classe di equivalenza numerica di una curva razionale estremale. In particolare il Teorema del Cono dimostrato da Mori in [23], garantisce che la famiglia di queste curve è numerabile ed i raggi estremali generati sono localmente discreti.

Teorema 1.4.2 (Teorema del Cono)**.** *[23][18, Theorem 3.7] Sia* X *una varietà proiettiva liscia. Allora esiste una famiglia numerabile* $(\Gamma_i)_{i\in I}$ *di curve razionali su* X *tali che*

$$0 < -K_X \cdot \Gamma_i \leq \dim(X) + 1$$

e

$$\overline{NE}(X) = \overline{NE}(X)_{K_X \geq 0} + \sum_{i \in I} \mathbb{R}^+[\Gamma_i]$$

in cui $\mathbb{R}^+[\Gamma_i]$ *sono tutti i raggi estremali distinti di* $\overline{NE}(X)$ *che intersecano* $N_1(X)_{K_X<0}$*. Tali raggi sono localmente disceti in questo semispazio.*

Un altro risultato fondamentale è dato dal seguente Teorema, che garantisce che ad ogni faccia estremale è associata una contrazione in maniera univoca, pertanto diventa possibile classificare le varietà a seconda del tipo di contrazioni associate ai loro raggi estremali.

Teorema 1.4.3 (Teorema di Contrazione)**.** *[18, Theorem 3.7.c] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia e sia $R \subset \overline{NE}(X)$ una faccia estremale contenuta in $\overline{NE}_{K_X<0}$. Allora esiste un unico morfismo $\Phi\colon X \to Y$ con Y varietà proiettiva, tale che $(\Phi)_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y$ ed ogni curva irriducibile $\mathcal{C}$ di X è contratta in un punto da Φ se, e solo se, $[\mathcal{C}] \in R$.*

Definizione 1.4.4. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia ed R una faccia estremale contenuta in $\overline{NE}_{K_X<0}$. Il morfismo $\Phi\colon X \to Y$ prende il nome di* contrazione estremale associata ad R. *In particolare, se R è un raggio estremale, allora la contrazione si dice* elementare *ed indichiamo con $Exc(R)$ il suo* luogo eccezionale*, ovvero l'insieme dei punti di X in cui Φ non è un isomorfismo locale.*

Le contrazioni elementari possono essere classificate rispetto alla dimensione del luogo eccezionale $Exc(R)$, suddividendole tra:

- *contrazioni di tipo fibrato* se $\dim X > \dim Y$ e dunque $Exc(R) = X$;
- *contrazioni birazionali* se $\dim X = \dim Y$, che possono a loro volta essere divise tra:
  - *contrazioni divisoriali* se $codim(Exc(R)) = 1$;
  - *contrazioni piccole* se $codim(Exc(R)) \geq 2$.

Definizione 1.4.5. *Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, R un raggio estremale contenuto in $\overline{NE}(X)$ e $\Phi : X \to Y$ la contrazione elementare ad esso associata. Definiamo la* lunghezza *del raggio come*

$$\ell(R) := \min\{-K_X \cdot C \mid C \text{ è una curva razionale e } [C] \in R\}.$$

Una curva che eguaglia il minimo è detta curva minima *del raggio R.*

Osservazione 1.4.6. Le fibre di contrazioni associate a raggi distinti si possono incontrare al più in punti.

Un risultato fondamentale che useremo nelle dimostrazioni dei prossimi Capitoli è il seguente Teorema, il quale, dato un raggio R, mette in relazione la sua lunghezza con le dimensioni della fibra e del luogo eccezionale della contrazione ad esso associata.

Teorema 1.4.7 (Disuguaglianza di Ionescu-Wiśniewski). *[34, Theorem 1.1][19, Theorem 0.4] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia, $Exc(R)$ il luogo eccezionale di una contrazione elementare $\Phi : X \to Y$ associata ad un raggio estremale R ed F una componente irriducibile di una fibra non banale di Φ, allora*

$$\dim F + \dim Exc(R) \geq \dim X + \ell(R) - 1.$$

La conoscenza della lunghezza di un raggio R e della dimensione di una fibra generica della contrazione ad esso associata, sotto opportune ipotesi, permette di risalire al tipo di contrazione associata al raggio. Un esempio è fornito dal seguente Teorema, mentre altri casi riguardanti nello specifico le varietà di Fano verranno esposti nel Capitolo 3.1.

Teorema 1.4.8. *[2, Theorem 5.1] Sia X una varietà proiettiva e liscia di dimensione n su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:*

i. esiste un raggio estremale R la cui contrazione associata è divisoriale e le fibre hanno dimensione $\ell(R)$;

ii. esiste un morfismo $\Phi : X \to X'$, con X' varietà proiettiva liscia, che è lo scoppiamento di X' lungo una sottovarietà liscia di codimensione $\ell(R) + 1$.

Capitolo 2

Varietà di Fano

Passiamo ora a definire le varietà di Fano e a studiare le loro proprietà rispetto alle famiglie di curve razionali ed alle contrazioni estremali.

2.1 Varietà di Fano ed invarianti numerici

Definizione 2.1.1. *Una varietà proiettiva complessa liscia X è detta* varietà di Fano *se il suo divisore anticanonico $-K_X$ è ampio.*

Da qui in avanti, se non diversamente specificato, indicheremo con X una varietà proiettiva complessa liscia di Fano.

Esempio 2.1.2. *Alcuni esempi di varietà di Fano sono*

- *le varietà proiettive $\mathbb{P}^n$;*
- *prodotti cartesiani $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$;*
- *lo scoppiamento di $\mathbb{P}^n$ in un suo punto;*
- *prodotti di varietà di Fano.*

Per ulteriori esempi possiamo ricorrere alla classificazione delle varietà di Fano di dimensione minore o uguale a 3.

Esempio 2.1.3. *Sia X una varietà di Fano di dimensione $dimX \leq 3$. Allora*

- *se $dimX = 1$ abbiamo che $X \cong \mathbb{P}^1$.*
- *se* $\dim X = 2$ *diciamo che X è una* superficie di del Pezzo *e, grazie alla classificazione di Fujita in [13, I.8] sappiamo che gli unici casi che si possono verificare sono*

- *–* $X \cong \mathbb{P}^2$*;*
- *–* $X \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$*;*
- *–* $X \cong Bl_Y(\mathbb{P}^2)$ *dove* Y *è un insieme di al più 8 punti di* $\mathbb{P}^2$ *tali che non ce ne siano 3 collineari, non 6 in una conica e non 8 in una cubica che ha uno di questi punti come punto singolare;*

- *se* $\dim X = 3$ *abbiamo che* X *è isomorfa ad una delle 105 varietà classificate da Mori e Mukai in [24] e [25].*

Le varietà di Fano che si ottengono come scoppiamento di una varietà liscia in un punto sono classificate dal seguente Teorema.

Teorema 2.1.4. *[4, Théorèm 1.1] Sia* X *una varietà complessa connessa liscia di dimensione* $n \geq 3$. *Sia* x *un punto di* X*, indichiamo con* $\pi_x \colon \widetilde{X} \to X$ *lo scoppiamento di* X *di centro* x. *Allora* $\widetilde{X}$ *è una varietà di Fano se, e solo se, vale una tra le seguenti:*

i. X *è isomorfo allo spazio proiettivo* $\mathbb{P}^n$ *ed* x *è un punto qualsiasi in* X*;*

ii. X *è isomorfo alla quadrica* $\mathbb{Q}^n$ *ed* x *è un punto qualsiasi in* X*;*

iii. X *è isomorfo alla varietà* V_d *ottenuta scoppiando* $\mathbb{P}^n$ *lungo una varietà liscia* Y *di dimensione* $n-2$ *di grado* d *con* $1 \leq d \leq n$ *contenuta in un iperpiano* H *tale che* $x \notin H$.

Notiamo che il Teorema 2.1.4 classifica le varietà di Fano che ammettono un raggio estremale associato ad uno scoppiamento di una varietà liscia in un punto. Risulta quindi evidente che una strategia per classificare le varietà di Fano è supporre che ammettano un raggio estremale associato ad una particolare contrazione e particolare rilievo hanno i casi in cui esiste un raggio estremale associato ad uno scoppiamento liscio.

Ad ogni varietà di Fano X, oltre al numero di Picard ρ_X, possiamo associare tre invarianti numerici:

- l'*indice* r_X, definito come il più grande intero m per cui possiamo scrivere $-K_X = mH$, con H un divisore (ampio) su X;

- il *coindice* q_X, definito come $\dim X + 1 - r_X$;

- lo *pseudoindice* i_X, definito come il minimo grado anticanonico delle curve razionali su X.

Chiaramente, poiché il divisore anticanonico $-K_X$ è ampio, nel gruppo di Picard di X possiamo scrivere $-K_X = r_X H$ con H un divisore ampio. In particolare $r_X \geq 1$. Inoltre

$$\begin{aligned} i_X &= min\{-K_X \cdot \mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ è una curva razionale su } X\} \\ &= min\{r_X H \cdot \mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ è una curva razionale su } X\} \\ &\geq r_X \end{aligned}$$

poiché $H \cdot \mathcal{C} \geq 1$, in quanto H è ampio e $\mathcal{C}$ è una curva liscia.
Un risultato classico che troviamo in [15] dimostra che $r_X \leq \dim X + 1$. Notiamo che questa disuguaglianza motiva la definizione di coindice e garantisce che $0 \leq q_X \leq \dim X$.
Più recentemente in [10] è stato dimostrato che anche $i_X \leq \dim X + 1$. Quindi, mettendo assieme queste considerazioni, troviamo una prima relazione tra gli invarianti

$$1 \leq r_X \leq i_X \leq \dim X + 1.$$

Se il massimo è raggiunto, allora $X = \mathbb{P}^{\dim X}$ come mostrato dai risultati seguenti:

Teorema 2.1.5. *[15] Una varietà liscia complessa X è isomorfa a $\mathbb{P}^{\dim X}$ se, e solo se, $r_X = \dim X + 1$.*

Teorema 2.1.6. *[10, cfr. Corollary 0.4] Una varietà liscia complessa X è isomorfa a $\mathbb{P}^{\dim X}$ se, e solo se, $i_X = \dim X + 1$.*

Osserviamo che lo spazio proiettivo $X = \mathbb{P}^n$ è quindi caratterizzato sia da $r_X = n + 1$ che da $i_X = n + 1$; tuttavia indice e pseudoindice non veicolano le stesse informazioni sulla varietà. Infatti, lavorando con l'indice, l'ipotesi $r_X = \dim X$ permette di determinare la varietà X grazie a [15, Theorem 2.1] in cui viene dimostrato che

$$r_X = \dim X \iff X = \mathbb{Q}^{\dim X};$$

mentre nel caso dello pseudoindice sapere che $i_X = \dim X$ non basta per determinare la varietà X, come possiamo vedere dal seguente risultato.

Teorema 2.1.7. *[21, cfr. Theorem 0.1][12, Theorem 1.3] Sia X una varietà di Fano di dimensione $\dim X \geq 3$. Allora*

- $i_X = \dim X$ *e* $\rho_X = 1 \iff X = \mathbb{Q}^{\dim X}$*;*
- $i_X = \dim X$ *e* $\rho_X > 1 \iff X$ *è un* $\mathbb{P}$*-fibrato.*

Tra indice e pseudoindice risulta più funzionale utilizzare quest'ultimo. Consideriamo a titolo di esempio una varietà $X = \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ con n, m coprimi tra loro. Chiarametnte abbiamo che l'indice è $r_X = 1$, mentre lo pseudoindice è$i_X = \min(n, m) + 1$. Se consideriamo i due raggi estremali R_1, R_2 di $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m$ vediamo che corrispondono alle proiezioni rispettivamente su $\mathbb{P}^n$ e $\mathbb{P}^m$; inoltre questi raggi hanno lunghezza $\ell(R_1) = n+1$ e $\ell(R_2) = m+1$. Inoltre analizzando le strategie in [33], in cui viene utilizzata implicitamente la definizione di pseudoindice, è evidente che lo pseudoindice fornisce maggiori informazioni sulla varietà che stiamo considerando, rispetto alle informazioni fornite dall'indice.

Un ulteriore legame tra gli invarianti numerici di una varietà di Fano è dato dalla seguente Congettura proposta da Mukai.

Congettura 2.1.8 (Congettura di Mukai)**.** *Sia X una varietà di Fano, allora $\rho_X(r_X - 1) \leq \dim X$ e vale l'uguaglianza se, e solo se, $X = (\mathbb{P}^{r_X-1})^{\rho_X}$.*

Tale Congettura è stata dimostrata in [33] nel caso in cui $r_X \geq \frac{\dim X+2}{2}$. Nello specifico, se vale la disuguaglianza stretta, allora anche $i_X > \frac{\dim X+2}{2}$ e viene dimostrato che $\rho_X = 1$, dunque la Congettura è verificata. Se invece $r_X = \frac{\dim X+2}{2}$ allora o $\rho_X = 1$ oppure $X = (\mathbb{P}^{r_X-1})^{\rho_X}$.

In [5], dove viene introdotta la definizione di pseudoindice, troviamo proposta una formulazione della Congettura più generale.

Congettura 2.1.9 (Congettura di Mukai Generalizzata)**.** *[5] Sia X una varietà di Fano, allora $\rho_X(i_X - 1) \leq \dim X$ e vale l'uguaglianza se, e solo se, $X = (\mathbb{P}^{i_X-1})^{\rho_X}$.*

Quest'ultima formulazione della Congettura è stata dimostrata in molteplici casi, tra cui le varietà di Fano X di dimensione piccola, in particolare

- se $\dim X = 1$, in quanto l'unica varietà di Fano è $\mathbb{P}^1$;
- se $\dim X = 2$ grazie alla classificazione in [13, I.8];
- se $\dim X = 3$ grazie alla classificazione di Mori-Mukai iniziata in [24] e poi completata in [25];
- se $\dim X = 4$ in [5];
- se $\dim X = 5$ in [1];
- se $\dim X = 6$ ed X ammette una famiglia di curve razionali dominante e non spezzante in [27].

Inoltre, in dimensione qualsiasi, ma assumendo che i_X sia sufficientemente grande, sono noti i seguenti casi in cui è verificata la Congettura di Mukai Generalizzata 2.1.9:

- se $i_X > \frac{\dim X+2}{2}$ unendo i risultati in [33] e [10];
- se $i_X = \frac{\dim X+2}{2}$ unendo i risultati in [33] e [32];
- se $i_X \geq \frac{\dim X+3}{3}$ ed ammette una famiglia di curve razionali dominante e non spezzante in [1];
- se $i_X \geq \frac{\dim X+3}{3}$ in [31];
- se $i_X > \frac{\dim X}{3}$ in [27];
- se $i_X = \frac{\dim X}{3}$ ed ammette una famiglia di curve razionali dominante e non spezzante in [27].

Infine la Congettura 2.1.9 è stata dimostrata in alcuni casi di varietà di Fano particolari:

- se X sia una varietà omogenea, torica con $\dim X \leq 7$ oppure torica di qualsiasi dimensione con pseudoindice $i_X \geq \frac{\dim X+3}{3}$ in [5];
- se X è una qualsiasi varietà torica in [6].

Le varietà di Fano presentano alcune proprietà interessanti rispetto ai risultati che abbiamo enunciato nel primo capitolo, riguardanti le contrazioni e le famiglie di curve razionali, che approfondiremo nei prossimi paragrafi.

2.2 Curve razionali e varietà di Fano

Un primo risultato fondamentale sulle varietà di Fano dovuto a Mori è che queste varietà contengono sempre curve razionali, come enunciato dal seguente Teorema.

Teorema 2.2.1. *[22, Theorem 6] Sia X una varietà proiettiva complessa liscia. Se il divisore anticanonico $-K_X$ è ampio allora X contiene una curva razionale.*

Non solo una varietà X contiene almeno una curva razionale, ma presi due punti arbitrari $x, y \in X$ esiste sempre una curva razionale della varietà che passa per tali punti, ovvero la varietà è razionalmente connessa, come mostrato dal seguente Teorema.

Teorema 2.2.2. *[17, Theorem 0.1] Una varietà di Fano complessa X di dimensione n è razionalmente connessa. Più precisamente, ogni due punti generali x ed y possono essere connessi da una curva razionale C tale che $-K_X \cdot C < c(n)$, dove*

$$c(n) = (n+1)n^{(2^n-1)(n+1)}\Big(1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n(n-1)}\Big).$$

Un ulteriore risultato fondamentale riguardante le varietà di Fano è l'esistenza di curve orizzontali rispetto ad un morfismo proprio suriettivo, garantita dal seguente Teorema.

Teorema 2.2.3. *[17, Theorem 2.1] Sia X una varietà di Fano. Supponiamo che esista un sottoinsieme aperto non vuoto $U \subset X$, una varietà quasi proiettiva Z ed un morfismo proprio suriettivo $\pi : U \to Z$. Supponiamo che Z abbia dimensione positiva e che $z \in Z$ sia un punto in posizione generale. Allora esiste una curva razionale C su X tale che C interseca $\pi^{-1}(z)$ senza esserne contenuta. Possiamo inoltre scegliere C che soddisfi $-K_X \cdot C \leq \dim X + 1$.*

Corollario 2.2.4. *[17, Corollary 2.9] Sia $\pi : X \to Z$ un morfismo liscio, suriettivo tra due varietà proiettive lisce. Se X è una varietà di Fano, allora lo è anche Z.*

2.3 Famiglie di curve razionali e varietà di Fano

Nel Paragrafo precedente abbiamo visto come una varietà di Fano X ammetta l'esistenza di curve razionali e curve orizzontali rispetto ad un morfismo π. Dalle stesse fonti possiamo ricavare che questi risultati sono validi non solo per curve razionali, ma anche per famiglie di tali curve.

Teorema 2.3.1. *[22] Sia X una varietà di Fano. Allora X ammette famiglie di curve razionali dominanti.*

Teorema 2.3.2. *[17, cfr. Lemma 3.1] Sia X una varietà di Fano e sia $\pi\colon X \to Z$ un morfismo proprio suriettivo. Supponiamo che la varietà Z abbia dimensione positiva. Allora esiste una famiglia V di curve razionali irriducibili su X tale che*

i. per ogni curva $\mathcal{C}$ della famiglia V si abbia $-K_X \cdot \mathcal{C} \leq \dim X + 1$;

ii. $\pi_*(V)$ sia una famiglia di curve razionali irriducibili su Z.

Poiché una varietà di Fano ammette famiglie di curve razionali dominanti, possiamo sempre scegliere una famiglia minima rispetto all'intersezione con un certo fibrato lineare fissato. Per convenzione, se non diversamente specificato, supporremmo che tale fibrato sia il divisore anticanonico $-K_X$. Possiamo dunque realizzare la seguente costruzione:

Costruzione 2.3.3. Sia X una varietà di Fano e consideriamo una famiglia di curve razionali minima dominante V^1 e la famiglia Chow associata $\mathcal{V}^1$. Se X non è rc($\mathcal{V}^1$)-connessa, consideriamo l'rc($\mathcal{V}^1$)-fibrazione $\pi_1 : X \dashrightarrow Z^1$. Per il Teorema 2.3.2 esiste almeno una famiglia di curve orizzontale dominante rispetto alla fibrazione, per cui possiamo sceglierne una minima che indichiamo con V^2. Se ancora X non è rc($\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$)-connessa, possiamo iterare il processo scegliendo una famiglia orizzontale dominante minimale V^3 rispetto alla rc($\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$)-fibrazione.

Osservazione 2.3.4. Notiamo che, proseguendo in questo modo, ad un certo punto il processo deve arrestarsi, perché ad ogni passo la dimensione di X si riduce di almeno $\dim Locus(V^i)_{x_i}$, dunque abbiamo che $\dim Z^{i+1} < \dim Z^i$ e pertanto esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che X è rc($\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$)-connesso e le famiglie $V^1, \ldots V^k$ sono numericamente indipendenti per costruzione. In particolare

$$\dim X \geq \sum_{i=1}^{j} \dim Locus(V^i)_{x_i}$$

per ogni $j \leq k$.

Con opportune ipotesi sulle famiglie di curve razionali della Costruzione 2.3.3, è possibile stimare il valore di k, ed in alcuni casi anche il valore del numero di Picard ρ_X, come mostrato dai risultati seguenti.

Teorema 2.3.5. *[32, Theorem 1.1] Sia X una varietà proiettiva, complessa liscia. Allora X è isomorfa al prodotto di spazi proiettivi $\mathbb{P}^{n(1)} \times \cdots \times \mathbb{P}^{n(k)}$ se, e solo se, esistono k famiglie di curve razionali non spezzanti $V^1, \ldots, V^k$ di grado rispettivamente $n(1)+1, \ldots, n(k)+1$ tali che $\sum n(i) = \dim X$ e le cui classi di equivalenza numerica sono linermente indipendenti in $N_1(X)$.*

Lemma 2.3.6. *[31, Lemma 4] Sia X una varietà di Fano con pseudoindice $i_X \geq 2$ e siano $V^1, \ldots, V^k$ famiglie di curve razionali come nella costruzione precedente. Allora*

$$\dim X \geq \sum_{i=1}^{k} (-K_X \cdot V^i - 1).$$

In particolare $\dim X \geq k(i_X - 1)$ *e l'uguaglianza è verificata se, e solo se,* $X = (\mathbb{P}^{i_X - 1})^k$.

Lemma 2.3.7. *[27, Lemma 4.4] Sia X una varietà di Fano di pseudoindice $i_X \geq 2$ e siano $V^1, \ldots, V^k$ famiglie di curve razionali come nella Costruzione 2.3.3. Se $V^1, \ldots, V^{h-1}$ con $h \leq k$ sono famiglie di curve razionali non spezzanti e $\dim Locus(V^h, \ldots, V^1)_{x_h} = \dim X - 1$ allora o $\rho_X = h = k$ oppure $i_X = 2, \rho_X = h + 1$ e $k - h \leq 1$.*

Lemma 2.3.8. *[27, Lemma 4.5] Sia X una varietà di Fano di pseudoindice $i_X \geq 2$ e siano $V^1, \ldots, V^k$ famiglie di curve razionali, di cui almeno una (che indichiamo con V^j) spezzante. Allora $k(i_X - 1) \leq \dim X - i_X$. Inoltre*

i. se $j = \frac{\dim X - i_X}{i_X - 1}$, allora $j = k$ e $\rho_X(i_X - 1) = \dim X - i_X$;

ii. se $j = \frac{\dim X - i_X - 1}{i_X - 1}$, allora $j = k$ e o $\rho_X(i_X - 1) = \dim X - i_X - 1$ oppure $i_X = 2$ e $\rho_X = \dim X - 2$.

Riconrdiamo inoltre che conoscere le famiglie Chow $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ rispetto a cui una varietà di Fano X è razionalmente connessa fornisce alcuni vantaggi. Come prima cosa permette di descrivere le curve della varietà; se in aggiunta richiediamo che le famiglie $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ siano non spezzanti, possiamo anche stimare il valore del numero di Picard della varietà, come mostrato nella seguente Proposizione.

Proposizione 2.3.9. *[1, Corollary 4.4] Sia X una varietà di Fano razionalmente connessa rispetto alle famiglie Chow $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$; allora ogni curva in X è numericamente equivalente ad una combinazione lineare a coefficienti razionali di componenti irriducibili di cicli in $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$. In particolare se le famiglie sono non spezzanti allora $\rho_X \leq k$.*

Inoltre è possibile dimostrare che un divisore effettivo (e quindi in particolare il luogo eccezionale di uno scoppiamento, caso che andremo a considerare nei prossimi Capitoli) non può essere banale su ogni componente irriducibile di ogni ciclo parametrizzato dalle famiglie $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$.

Proposizione 2.3.10. *[31, Corollary 3] Sia X una varietà di Fano razionalmente connessa rispetto alle famiglie Chow $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ e sia D un divisore effettivo. Allora D non può essere banale su ogni componente irriducibile di ogni ciclo parametrizzato da $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$.*

Infine, le famiglie $\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$ possono anche fornire alcune informazioni sul cono di Kleiman–Mori, come mostrato nel seguente risultato.

Lemma 2.3.11. *[8, Lemma 2.4] Sia X una varietà di Fano e siano $V^1, \ldots V^k$ famiglie di curve razionali localmente non spezzanti tali che V^1 sia coprente* *e le famiglie V^i siano orizzontali e dominanti rispetto alla rc($\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^{i-1}$)-fibrazione. Sia $\pi : X \dashrightarrow Z$ l'rc($\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$)-fibrazione e supponiamo che* $\dim Z > 0$ *(i.e. X non è rc($\mathcal{V}^1, \ldots, \mathcal{V}^k$)-connesso). Allora o* $[V^1], \ldots, [V^k]$ *sono contenute in una faccia estremale di NE(X) oppure esiste un raggio estremale R associato ad una contrazione piccola, il cui luogo eccezionale è contenuto nel luogo di indeterminatezza di π.*

2.4 Raggi estremali di varietà di Fano

Un altro risultato fondamentale riguardante le varietà di Fano è che il loro cono di Kleiman–Mori è chiuso, ovvero se X è una varietà di Fano allora $\overline{NE}(X) = NE(X)$, ed ogni faccia di $NE(X)$ è estremale.

Poiché nei Capitoli successivi ci occuperemo di studiare alcune varietà di Fano che ammettono un raggio estremale associato ad uno scoppiamento liscio, il cui luogo eccezionale è quindi un divisore effettivo, richiamiamo alcuni risultati riguardanti questi divisori.

Lemma 2.4.1. *[4, Lemme 2.1] Sia X una varietà di Fano e D un divisore effettivo su X. Allora esiste un raggio $R \subset NE(X)$ tale che $D \cdot R > 0$.*

Corollario 2.4.2. *[30, Corollary 2.15] Sia X una varietà di Fano con pseudoindice $i_X \geq 2$, R un raggio estremale e E un divisore effettivo su X tale che nessuna curva in E abbia una classe numerica che appartiene ad R. Se $E \cdot R > 0$ allora la contrazione associata ad R è un $\mathbb{P}^1$-fibrato.*

Lemma 2.4.3. *[9, Lemma 5.2] Sia X una varietà di Fano con $\rho_X = 3$. Sia E un divisore effettivo negativo su un raggio estremale R di $NE(X)$ e non negativo su tutti gli altri raggi del cono. Se $E \cdot \mathcal{C} = 0$ per una curva $\mathcal{C}$ la cui classe di equivalenza sta nella frontiera del cono $\partial NE(X)$, allora $[\mathcal{C}]$ è contenuta in una faccia di dimensione due del cono $NE(X)$ che contiene R.*

Teorema 2.4.4. *[7, cfr. Theorem 1.2] Sia X una varietà di Fano con pseudoindice $i_X \geq 2$. Allora per ogni divisore primo $D \subset X$ si ha che* $\operatorname{codim} N_1(D, X) \leq 1$ *e vale una tra le seguenti:*

i. *$i_X = 2$ ed esiste un morfismo liscio $X \to Y$ con fibre isomorfe a $\mathbb{P}^1$ e Y una varietà di Fano di pseudoindice $i_Y \geq 2$;*

ii. *$N_1(D, X) = N_1(X)$ per ogni divisore primo $D \subset X$.*

Sotto particolari ipotesi, è possibile ottenere una varietà di Fano anche partendo da una varietà che non lo è, come mostrato dalla seguente Proposizione.

Proposizione 2.4.5. *[34, Proposition 3.4] Sia* $\sigma\colon X \to Y$ *lo scoppiamento di una varietà* Y *di dimensione* $\dim Y \geq 3$ *lungo una sottovarietà liscia* $Z \subset Y$ *di codimensione* $\operatorname{codim} Z \geq 2$. *Assumiamo che* X *sia una varietà di Fano, ma non lo sia* Y. *Allora*

i. *esiste un raggio* R_X *di* X *che non è contratto dallo scoppiamento* σ *ma tale che* $Exc(R_\sigma) \cdot R_X < 0$, *dunque ogni curva* $\mathcal{C}$ *la cui classe di equivalenza appartiene ad* R_X *è contenuta anche in* $Exc(R_\sigma)$;

ii. *esiste un raggio* R_E *di* $Exc(R_\sigma)$ *con* $\ell(R_E) \geq 2$ *che non è contratto dallo scoppiamento* σ;

iii. *il divisore canonico* K_Z *non è numericamente effettivo.*

Se inoltre $\rho_{Exc(R_\sigma)} = 2$ *oppure le fibre della contrazione associata al raggio* R_X *hanno dimensione maggiore o uguale alla dimensione di* Z, *allora* $Exc(R_\sigma)$ *e* Z *sono varietà di Fano.*

Riportiamo ora alcuni risultati che permettono di descrivere il cono di curve di una varietà di Fano X, assumendo alcune ipotesi sul valore dello pseudoindice e sulla lunghezza di un determinato raggio. In alcuni casi la conoscenza del cono $NE(X)$ sarà sufficiente per determinare la varietà.

In [3], ad esempio, supponendo di lavorare con una varietà di Fano X il cui numero di Picard sia $\rho_X \geq 2$, viene dimostrato che la lunghezza di ogni raggio R contenuto nel cono $NE(X)$ è limitata, ovvero che

$$i_X + \ell(R) \leq \dim Exc(R) + 2.$$

Vengono quindi classificate le varietà che ammettono un raggio R di lunghezza massima, supponendo che questo sia associato o ad una contrazione di tipo fibrato o ad una contrazione divisoriale.

Teorema 2.4.6. *[3, Theorem 1.1] Sia* X *una varietà di Fano liscia, con pseudoindice* i_X *e numero di Picard* $\rho_X \geq 2$. *Sia* R *un raggio estremale associato ad una contrazione di tipo fibrato o ad una contrazione divisoriale tale che*

$$i_X + \ell(R) = \dim Exc(R) + 2.$$

Allora X *è isomorfa ad una delle varietà riportate nella seguente tabella, dove dove con* F *indichiamo una contrazione di tipo fibrato, con* D *una contrazione* *divisoriale, e poniamo* $t = \dim X - \ell(R) - 1$.

i_X	ρ_X	R	R_2	*Varietà*
$\dim X - \ell(R) + 1$	2	D	F	$Bl_{\mathbb{P}^t}(\mathbb{P}^n)$
$\dim X - \ell(R) + 2$		F	F	$\mathbb{P}^{\ell(R)-1} \times \mathbb{P}^{i_X - 1}$

In seguito vengono anche studiate le varietà di Fano che ammettono un raggio R, sempre associato o ad una contrazione di tipo fibrato o ad una divisoriale, ma la cui lunghezza soddisfa

$$i_X + \ell(R) = \dim Exc(R) + 1,$$

come mostrato nel seguente risultato.

Teorema 2.4.7. *[3, Theorem 5.1] Sia X una varietà di Fano di dimensione n, con $\rho_X \geq 2$ ed $i_X \geq 2$. Sia R un raggio estremale associato ad una contrazione di tipo fibrato o divisoriale tale che*

$$i_X + \ell(R) = \dim Exc(R) + 1.$$

Allora $\rho_X \leq 3$ e $NE(X)$ è uno tra i coni descritti nella seguente tabella, dove con F indichiamo una contrazione di tipo fibrato, con D una contrazione divisoriale, mentre Y è una sottovarietà di dimensione $\dim X - 2$ *e grado al più* $\dim X$ *contenuta in un iperpiano H tale che $p \notin H$.*

i_X	ρ_X	R	R_2	R_3	*Varietà*
$\dim X - \ell(R)$	3	D	D	F	$Bl_p(Bl_Y(\mathbb{P}^n))$
		D	F	F	$Bl_{\mathbb{P}^1 \times \{p\}}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$
$\dim X - \ell(R) + 1$	2	F	D		$Bl_{\mathbb{P}^{\ell(R)-2}}(\mathbb{P}^n)$
	3	F	F	F	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-2}$
$\dim Exc(R) - \ell(R) + 1$	2	R	F		?

Osservazione 2.4.8. Nel caso in cui il raggio R sia associato ad una contrazione divisoriale, la condizione del Teorema 2.4.6 diventa

$$i_X + \ell(R) = \dim X + 1$$

mentre quella del Teorema 2.4.7 diventa

$$i_X + \ell(R) = \dim X.$$

Supponendo come ipotesi aggiuntiva che la contrazione divisoriale associata ad R sia uno scoppiamento, è possibile trovare una classificazione di tutte le varietà per cui

$$i_X + \ell(R) \geq \dim X,$$

come mostrato nel seguente Teorema.

Teorema 2.4.9. *[3, Theorem 1.3] Sia X una varietà di Fano di dimensione n e pseudoindice $i_X \geq 2$. Sia R un raggio estremale associato allo scoppiamento di una varietà liscia Y tale che*

$$i_X + \ell(R) \geq \dim X.$$

Allora X è isomorfa ad una tra le varietà riportate in tabella, dove con F indichiamo una contrazione di tipo fibrato, con D una contrazione divisoriale, mentre Y è una sottovarietà di dimensione $\dim X - 2$ e grado al più $\dim X$ contenuta in un iperpiano H tale che $p \notin H$ e $t \leq \frac{n}{2} - 1$.

i_X	ρ_X	R	R_2	R_3	*Varietà*
$\dim X - \ell(R)$	2	D	F		$Bl_{\mathbb{P}^t}(\mathbb{Q}^n)$
		D	F		$Bl_{\mathbb{Q}^t}(\mathbb{Q}^n)$
	3	D	D	F	$Bl_p(Bl_Y(\mathbb{P}^n))$
		D	F	F	$Bl_{\mathbb{P}^n \times \{p\}}(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^{n-1})$
$\dim X - \ell(R) + 1$	2	D	F		$Bl_{\mathbb{P}^t}(\mathbb{P}^n)$

In particolare questi risultati permettono di classificare le varietà di Fano che ammettono un raggio estremale associato ad uno scoppiamento di una curva.

Il caso successivo, ovvero lo studio delle varietà di Fano che ammettono un raggio la cui lunghezza soddisfa

$$\ell(R) + i_X = \dim X - 1,$$

viene trattato in [9], in cui si riesce a descrivere esplicitamente il cono della varietà, supponendo in aggiunta che il raggio R sia associato ad uno scoppiamento liscio.

Teorema 2.4.10. *[9, Theorem 1.1] Sia X una varietà di Fano con pseudoindice $i_X \geq 2$ e $\dim X \geq 6$ con un raggio R associato ad uno scoppiamento liscio la cui lunghezza soddisfa*

$$i_X + \ell(R) = \dim X - 1.$$

Allora i possibili coni di curve della varietà X sono quelli esposti nella seguente tabella, dove indichiamo con F una contrazione di tipo fibrato e con D_i lo scoppiamento di una varietà liscia lungo una sottovarietà di dimensione i.

i_X	ρ_X	R	R_2	R_3	R_4
	2	D_{i_X}	F		
		D_{i_X}	$D_{\dim X-3}$		
2	3	D_{i_X}	F	$D_{\dim X-3}$	
2, 3		D_{i_X}	F	F	
2	4	D_{i_X}	F	F	F

Notiamo che in questo caso, nonostante sia possibile descrivere esplicitamente il cono di Kleimann–Mori, non è stato ancora possibile determinare la varietà.

Concludiamo questo paragrafo con un'utile adattamento per le varietà di Fano del Teorema 1.4.7.
Ricordando che lo pseudoindice è il minimo numero d'intersezione tra il divisore anticanonico e una curva della varietà, mentre la lunghezza di un raggio R è il minimo numero d'intersezione tra il divisore anticanonico ed una curva contenuta nel raggio, troviamo che $\ell(R) \geq i_X$. Possiamo quindi confrontare direttamente la dimensione di una fibra della contrazione associata al raggio R con lo pseudoindice i_X.

Osservazione 2.4.11. Se X è una varietà di Fano ed R un suo raggio estremale, possiamo riscrivere la disuguaglianza del Teorema 1.4.7 come:

- $\dim F \geq \ell(R) - 1 \geq i_X - 1$ se la contrazione associata al raggio R è di tipo fibrato;
- $\dim F \geq \ell(R) \geq i_X$ se la contrazione associata ad R è di tipo divisoriale;

dove con F indichiamo una generica fibra non banale della contrazione associata al raggio estremale R.

Capitolo 3

Varietà di Fano e scoppiamenti

3.1 Risultati noti

Un primo passo per classificare le varietà di Fano è studiare il loro cono di Kleiman–Mori, cercando, dove possibile, di risalire alla varietà basandosi sul tipo di contrazioni associate ai raggi nel cono.

Inizialmente, è stata tentata una classificazione delle varietà di Fano per valori alti dell'indice. In particolare sono noti i seguenti risultati:

- se $r_X = \dim X + 1$ o equivalentemente $q_X = 0$ allora la varietà X è isomorfa a $\mathbb{P}^n$ grazie al Teorema 2.1.5;
- se $r_X = \dim X$ o equivalentemente $q_X = 1$ la varietà X è isomorfa alla quadrica $\mathbb{Q}^n$ grazie a [15, Theorem 2.1];
- se $r_X = \dim X - 1$ o equivalentemente $q_X = 2$ la varietà X prende il nome di *varietà di del Pezzo* e tutte queste varietà sono state classificate in [13];
- se $r_X = \dim X - 2$ o equivalentemente $q_X = 3$ la varietà X prende il nome di *varietà di Mukai* e tutte queste varietà sono state classificate unendo i risultati di [26] e [20].

Le tecniche usate in questi casi però non risultano efficaci nel tentativo di classificare le varietà di coindice $q_X \geq 4$.
Tuttavia, poiché le varietà di Fano contengono famiglie di curve razionali (Teorema 2.3.1) ed ammettono famiglie di curve orizzontali rispetto ad una fibrazione (Teorema 2.3.2), è possibile studiare il cono $NE(X)$ utilizzando i risultati e le considerazioni riguardanti le famiglie e le catene di curve razionali, esposti nei Capitoli precedenti.

Possiamo trovare un esempio di tali applicazioni in [8]. Qui, dopo aver notato che per le varietà di Fano X di coindice $q_X = 4$, dimensione $\dim X \geq 5$ e con numero di Picard $\rho_X \geq 2$, indice e pseudoindice coincidono, il problema viene riformulato studiando il cono di curve delle varietà di Fano con pseudoindice $i_X = \dim X - 3$, come mostrato dal seguente Teorema.

Teorema 3.1.1. *[8, Theorem 1.1] Sia X una varietà di Fano di dimensione $\dim X \geq 5$, pseudoindice $i_X = \dim X - 3$ e numero di Picard $\rho_X \geq 2$. Allora il cono $NE(X)$ è generato da ρ_X raggi. Più precisamente tutti i casi che possono verificarsi sono indicati nelle tabelle seguenti, dove F indica una contrazione di tipo fibrato, D_i una contrazione divisoriale il cui luogo eccezionale è mandato in una sottovarietà di dimensione i e S una contrazione piccola.*

i_X	ρ_X	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5
2	2	F	F			
		F	D_0			
		F	D_1			
		F	D_2			
		F	S			
		D_2	D_2			
		D_2	S			
	3	F	F	F		
		F	F	S		
		F	F	D_1		
		F	F	D_2		
		F	D_2	D_2		
	4	F	F	F	F	
		F	F	F	D_2	
	5	F	F	F	F	F

i_X	ρ_X	R_1	R_2	R_3
3	2	F	F	
		F	D_1	
		F	D_2	
		F	S	
	3	F	F	F
4	2	F	F	
		F	D_2	
5	2	F	F	

In alcuni casi particolari la conoscenza delle contrazioni associate ai raggi in $NE(X)$ permette di determinare la varietà X. Un esempio è riportato nel seguente Teorema.

Teorema 3.1.2. *[8, Theorem 1.2] Sia X una varietà di Fano di dimensione $\dim X = 5$, con pseudoindice $i_X = 2$ che non ammette famiglie di curve razionali coprenti quasi-non spezzanti e localmente non spezzanti. Allora X è isomorfa ad uno degli scoppiamenti riportati in tabella, dove con $\mathbb{Q}^2$ indichiamo una quadrica liscia 2-dimensionale e con V_2 la superficie di*

Veronese.

i_X	ρ_X	*Varietà*	Y
2	2	$Bl_Y(\mathbb{P}^5)$	$\mathbb{Q}^2$
			scroll cubico
			V_2

Nel caso in cui la varietà di Fano X abbia pseudoindice $i_X > \frac{\dim X}{3}$ (oppure pseudoindice $i_X = \frac{\dim X}{3}$ ed ammetta una famiglia di curve razionali dominante non spezzante), possiamo utilizzare in aggiunta la Congettura di Mukai Generalizzata 2.1.9 che permette di confrontare il numero di Picard ρ_X con lo pseudoindice i_X.

In [28], ad esempio, vengono considerate le varietà di Fano con pseudoindice $i_X \geq \frac{\dim X+1}{3}$ e numero di Picard $\rho_X \geq 3$.
In particolare vengono classificate tutte le varietà di Fano X con pseudoindice $i_X \geq \frac{\dim X+2}{3}$ e numero di Picard $\rho_X \geq 3$, determinando a quali contrazioni sono associati i raggi estremali del cono $NE(X)$.

Teorema 3.1.3. *[28, Theorem] Sia X una varietà di Fano con pseudoindice $i_X \geq \frac{\dim X+2}{3}$ e numero di Picard $\rho_X \geq 3$. Allora X è isomorfa ad una tra le varietà riportate nella seguente tabella, dove con F indichiamo una contrazione di tipo fibrato, mentre con D_{i_X-2} uno scoppiamento lungo una varietà di dimensione $i_X - 2$.*

i_X	ρ_X	R_1	R_2	R_3	R_4	*Varietà*
$\frac{\dim X+2}{3}$	3	F	F	F		$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X}$
		F	F	F		$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{Q}^{i_X}, i_X \geq 3$
		F	F	F		$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{i_X}}(T_{\mathbb{P}^{i_X}})$
		F	F	D_{i_X-2}		$\mathbb{P}^{i_X-1} \times Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X-1}$
	4	F	F	F	F	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
$\frac{\dim X+3}{3}$	3	F	F	F		$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X-1}$

Il caso invece di varietà di Fano X con pseudoindice $i_X = \frac{\dim X+1}{3} \geq 2$, viene suddiviso in due sottocasi, a seconda del valore del numero di Picard della varietà. In particolare, con la seguente Proposizione, vengono classificate le varietà di Fano con numero di Picard $\rho_X \geq 4$.

Proposizione 3.1.4. *[28, Proposition 5.1] Sia X una varietà di Fano di pseudoindice $i_X = \frac{\dim X+1}{3} \geq 2$ e numero di Picard $\rho_X \geq 4$. Allora X è isomorfa ad una tra le varietà riportate nella seguente tabella, dove con F indichiamo una contrazione di tipo fibrato, mentre con D_0 lo scoppiamento di una varietà in un punto.*

i_X	ρ_X	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	*Varietà*
2	4	F	F	F	F		$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^2$
		F	F	F	F		$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{P}^2}(T_{\mathbb{P}^2})$
		F	F	F	D_0		$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times Bl_p(\mathbb{P}^3)$
	5	F	F	F	F	F	$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$
3	4	F	F	F	F		$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$

Nel caso invece di varietà di Fano sempre con pseudoindice $i_X = \frac{\dim X+1}{3}$ ma numero di Picard $\rho_X = 3$, si può ottenere una classificazione richiedendo in aggiunta che la varietà X sia rc(V^1, V^2, V^3)-connessa rispetto a tre famiglie di curve razionali non spezzanti come nella Costruzione 2.3.3, di cui almeno una che soddisfi $-K_X \cdot V^i > i_X$.

Teorema 3.1.5. *[28, Theorem 5.7] Sia X una varietà di Fano con pseudoindice $i_X = \frac{\dim X+1}{3} \geq 2$, numero di Picard $\rho_X = 3$ e che sia rc(V^1, V^2, V^3)-connessa rispetto a tre famiglie di curve razionali non spezzanti come nella Costruzione 2.3.3. Allora o $-K_X \cdot V^i = i_X$ per ogni $i = 1, 2, 3$ oppure X è isomorfa ad una tra le varietà riportate nella seguente tabella, dove con F indichiamo una contrazione di tipo fibrato, mentre con D_i uno scoppiamento lungo una varietà di dimensione i.*

i_X	ρ_X	R_1	R_2	R_3	*Varietà*
$\frac{\dim X+1}{3}$	3	F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X+1}$
		F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{Q}^{i_X+1}$
		F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X} \times \mathbb{P}^{i_X}$
		F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}^{i_X} \times \mathbb{Q}^{i_X}$, *con* $i_X \geq 3$
		F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{i_X}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{i_X}}^{\bigoplus i_X} \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{i_X}}(1))$
		F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{i_X}}(T_{\mathbb{P}^{i_X}} \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{i_X}}(1))$
		F	F	F	$\mathbb{P}^{i_X} \times \mathbb{P}_{\mathbb{P}^{i_X}}(T_{\mathbb{P}^{i_X}})$
		F	F	D_{i_X-1}	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times Bl_{\mathbb{P}^{i_X-1}}\mathbb{P}^{2i_X}$
		F	F	D_{i_X-2}	$\mathbb{P}^{i_X-1} \times Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X}$
		F	F	D_{i_X-2}	$\mathbb{P}^{i_X} \times Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X-1}$

In [29] viene ripreso il caso delle varietà di Fano X con pseudoindice $i_X \geq \frac{\dim X+1}{3}$ e numero di Picard $\rho_X \geq 3$. Supponendo questa volta che tali varietà ammettano un raggio estremale R_σ associato ad uno scoppiamento liscio, è possibile trovarne una classificazione, come mostrato dal seguente Teorema.

Teorema 3.1.6. *[29, Theorem 1.1] Sia X una varietà di Fano di pseudoindice $i_X \geq \frac{\dim X+1}{3} \geq 2$ e numero di Picard $\rho_X \geq 3$. Assumiamo che X abbia un raggio estremale R_σ associato ad uno scoppiamento liscio. Allora vale una tra le seguenti:*

i_X	ρ_X	R_σ	R_1	R_2	R_3
2	4	D	F	F	F
$\frac{\dim X+1}{3}$	3	D	F	D	
$i_X \geq \frac{\dim X+1}{3}$	3	D	F	F	

Nelle prossime sezioni ci occuperemo di considerare il caso successivo rispetto allo pseudoindice, ovvero per $i_X = \frac{\dim X}{3}$, assumendo che esista una famiglia di curve razionali V^1 dominante non spezzante e un raggio estremale R_σ di lughezza $\ell(R_\sigma) = i_X + 1$ associato ad uno scoppiamento liscio.

In questo Capitolo supporremmo soddisfatte le seguenti

Ipotesi 3.1.7. *Sia X una varietà di Fano liscia tale che*

- *il numero di Picard di X sia $\rho_X \geq 3$;*
- *lo pseudoindice soddisfi $i_X = \frac{\dim X}{3} > 2$;*
- *esista un raggio estremale R_σ di lunghezza $\ell(R_\sigma) = i_X + 1$ associato ad uno scoppiamento liscio $\sigma\colon X \to X'$;*
- *esista una famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante.*

3.2 Cono di Kleimann–Mori per $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$

In questa sezione assumeremo le Ipotesi 3.1.7 e che la famiglia di curve V^1, dominante e non spezzante, sia positiva rispetto al luogo eccezionale $Exc(R_\sigma)$ dello scoppiamento associato ad R_σ. Mostreremo che in questo caso possiamo descrivere in maniera esplicita il cono $NE(X)$.
Nella prossima sezione invece tratteremo il caso in cui $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$.

Osservazione 3.2.1. Notiamo che la terza possibilità $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 < 0$ non può verificarsi, perché altrimenti ogni curva la cui classe di equivalenza numerica è contenuta in $[V^1]$ sarebbe contenuta anche in $Exc(R_\sigma)$. In particolare, siccome V^1 è dominante, avremmo

$$\dim X - 1 = \dim Exc(R_\sigma) \geq \dim Locus(V^1) = \dim X$$

che è assurdo.

Iniziamo dimostrando la seguente Proposizione, con la quale possiamo stabilire a quali contrazioni possono essere associati i raggi estremali della varietà X.

Proposizione 3.2.2. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e che ammette una famiglia V^1 di curve razionali dominante e non spezzante tale che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$. Allora ogni altro raggio estremale di X è associato o ad una contrazione di tipo fibrato o ad uno scoppiamento liscio; in quest'ultimo caso le fibre non banali di ogni scoppiamento hanno dimensione uguale ad i_X.*

Dimostrazione. Sia R un raggio estremale di X diverso da R_σ e tale che $[V^1] \notin R$. Indichiamo con F_R una qualsiasi fibra non banale della contrazione associata ad R. Poiché V^1 è una famiglia dominante, abbiamo che $Locus(V^1)_{F_R} \neq \emptyset$; quindi, siccome per ipotesi abbiamo che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$

$$Exc(R_\sigma) \cap Locus(V^1)_{F_R} \neq \emptyset.$$

In particolare esiste una fibra F_σ dello scoppiamento associato ad R_σ tale che

$$F_\sigma \cap Locus(V^1)_{F_R} \neq \emptyset$$

e tale intersezione ha dimensione zero. Infatti, se per assurdo avesse dimensione strettamente positiva, allora esisterebbe almeno una curva $\mathcal{C}$ nell'intersezione; in particolare essendo una curva contenuta nella fibra F_σ avremmo che $[\mathcal{C}] \in R_\sigma$. Tuttavia $\mathcal{C}$ è anche contenuta in $Locus(V^1)_{F_R}$, dunque per il Lemma 1.3.20 abbiamo che $\mathcal{C}$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare del tipo $\lambda_{V^1}\mathcal{C}_{V^1} + \lambda_{F_R}\mathcal{C}_{F_R}$ con $\lambda_{F_R} \geq 0$. Siccome R_σ è estremale,

questo implica che anche $\mathcal{C}_{V^1}$ e $\mathcal{C}_{F_R}$ siano contenute in R_σ. Ma questo è assurdo perché $[V^1], R_\sigma$ ed R sono numericamente indipendenti in quanto per ipotesi avevamo $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$.
Dunque, utilizzando il Lemma 1.3.11, possiamo ricavare che

$$\begin{aligned} 3i_X = \dim X &\geq \dim F_\sigma + \dim Locus(V^1)_{F_R} \\ &\geq \dim F_\sigma + \dim F_R - K_X \cdot V^1 - 1 \\ &\geq \dim F_\sigma + \dim F_R + i_X - 1 \\ &= i_X + 1 + \dim F_R + i_X - 1. \end{aligned}$$

Quindi $i_X \geq \dim F_R$. Ma allora dal Teorema 1.4.7 applicato al raggio R troviamo

$$\begin{aligned} \dim Exc(R) + i_X &\geq \dim Exc(R) + \dim F_R \\ &\geq \dim X - 1 + \ell(R) \\ &\geq \dim X - 1 + i_X. \end{aligned}$$

Pertanto $\dim Exc(R) \geq \dim X - 1$. In particolare se vale l'uguaglianza R è associato ad una contrazione divisoriale, altrimenti R è associato ad una contrazione di tipo fibrato; in ogni caso non ci possono essere contrazioni piccole.
Supponiamo di essere nel caso di una contrazione divisoriale, ovvero che $\dim Exc(R) = \dim X - 1$. Allora per l'Osservazione 2.4.11 abbiamo che $\dim F_R \geq i_X$, dunque per quanto appena dimostrato $i_X = \dim F_R$. Allora per il Teorema 1.4.8 possiamo concludere che R è associato ad uno scoppiamento le cui fibre non banali hanno dimensione i_X. □

Avendo escluso con la Proposizione 3.2.2 la presenza di contrazioni piccole, possiamo dimostrare che nel cono di curve $NE(X)$ esiste sempre almeno un raggio fibrato che contiene la classe di equivalenza numerica della famiglia V^1.

Proposizione 3.2.3. *Sia X una varietà di Fano con $\rho_X \geq 3$, che ammetta un raggio estremale R_σ associato ad uno scoppiamento liscio ed una famiglia V^1 di curve razionali dominante e non spezzante tale che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$. Se inoltre X non ammette raggi estremali associati a contrazioni piccole, allora la classe di equivalenza $[V^1]$ è contenuta in un raggio estremale R_1 di X associato ad una contrazione di tipo fibrato ed i raggi estremali R_1 ed R_σ generano una faccia estremale.*

Dimostrazione. Consideriamo l'rc(V^1)-fibrazione $\pi : X \dashrightarrow Z$ e sia V^σ una famiglia di deformazioni di una curva minima in R_σ. Per ipotesi abbiamo

che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$, dunque la famiglia V^σ è orizzontale e dominante rispetto alla fibrazione π. Inoltre, poiché $\rho_X \geq 3$, la varietà X non può essere rc(V^1, V^σ)-connessa. Dunque applicando il Lemma 2.3.11 deduciamo che $[V^1]$ e $[V^\sigma]$ stanno su una faccia estremale $\langle R_\sigma, R_1 \rangle$, perché non possiamo avere contrazioni piccole per ipotesi.
Sia ora L un fibrato lineare molto ampio su Z e consideriamo il suo pullback $H := \pi^* L$. Siccome le curve parametrizzate da V^1 vengono contratte da π, $H \cdot V^1 = 0$. Inoltre siccome H è il pullback di un fibrato molto ampio, abbiamo che dev'essere positivo al di fuori del luogo di indeterminazione di π, quindi in particolare $H \cdot R_\sigma > 0$, poiché V^σ è dominante rispetto a π.
Supponiamo ora per assurdo che $[V^1] \notin R_1$, allora il luogo eccezionale di R_1 è contenuto nel luogo di indeterminazione di π. Ora, siccome tale luogo deve avere almeno codimensione 2 in X, ne consegue che R_1 è associato ad una contrazione piccola, ma questo contraddice le ipotesi. Quindi si ha che $[V^1] \in R_1$, ed essendo V^1 una famiglia dominante, la contrazione associata ad R_1 deve essere di tipo fibrato. □

Possiamo ora dimostrare che il numero di Picard è $\rho_X = 3$. Notiamo che mentre i risultati precedenti sono validi per qualsiasi raggio divisoriale R_σ e per qualsiasi valore dello pseudoindice, la Proposizione seguente richiede le Ipotesi 3.1.7.

Proposizione 3.2.4. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e che ammette una famiglia V di curve razionali dominante e non spezzante tale che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$. Allora $\rho_X = 3$.*

Dimostrazione. Per ipotesi sappiamo che V^1 è una famiglia dominante e non spezzante tale che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$, dunque una famiglia di deformazione V^σ di una curva minima in R_σ è orizzontale e dominante rispetto all'rc(V^1)-fibrazione $\pi_1 \colon X \to Z^1$. Possiamo quindi considerare l'rc(V^1, V^σ)-fibrazione $\pi_\sigma \colon X \dashrightarrow Z^\sigma$. Notiamo che siccome R_σ è associato ad uno scoppiamento, la famiglia V^σ non può essere dominante, altrimenti avremmo $\dim Exc(R_\sigma) = \dim X$. Pertanto dall'Osservazione 1.3.10 sappiamo che $\dim Locus(V^\sigma)_{x_\sigma} \geq -K_X \cdot V^\sigma = i_X + 1$.
Se X fosse rc(V^1, V^σ)-connessa per la Proposizione 2.3.9 avremmo che $\rho_X \leq 2$, contraddicendo le ipotesi. Pertanto, possiamo scegliere una famiglia di curve razionali V^3 orizzontale e dominante rispetto all'rc(V^1, V^σ)-fibrazione π. Una tale famiglia esiste sempre per il Teorema 2.3.2.
Supponiamo inizialmente che V^3 sia spezzante.
Consideriamo quindi l'rc(V^1, V^σ, V^3)-fibrazione $\pi_3 \colon X \to Z^3$. Grazie all'Os-

servazione 2.3.4 troviamo

$$\begin{aligned}
\dim X &\geq \sum_{i=1,\sigma,3} \dim Locus(V^i)_{x_i} \\
&\geq \sum_{i=1,3} (-K_X \cdot V^i - 1) - K_X \cdot V^\sigma \\
&\geq (2i_X - 1) + (i_X - 1) + (i_X + 1) \\
&> \dim X + 1
\end{aligned}$$

che è assurdo. Dunque V^3 dev'essere non spezzante. Se ora calcoliamo la dimensione della varietà Z^3 sempre usando l'Osservazione 2.3.4 otteniamo

$$\begin{aligned}
\dim Z^3 &\leq \dim X - \sum_{i=1,\sigma,3} \dim Locus(V^i)_{x_i} \\
&\leq \dim X - \Big(\sum_{i=1,3} (-K_X \cdot V^i - 1) - K_X \cdot V^\sigma \Big) \\
&\leq 3i_X - (2i_X - 2 + i_X + 1) \\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

Se $\dim Z^3 = 1$ allora per il Teorema 2.3.2 possiamo trovare una famiglia di curve razionali V^4 orizzontale e dominante rispetto all'rc(V^1, V^σ, V^3)-fibrazione. Tuttavia se ora calcoliamo

$$\begin{aligned}
\dim X &\geq \sum_{i=1,\sigma,3,4} \dim Locus(V^i)_{x_i} \\
&\geq \sum_{i=1,3,4} (-K_X \cdot V^i - 1) - K_X \cdot V^\sigma \\
&\geq 3i_X - 3 + i_X + 1 \\
&> \dim X
\end{aligned}$$

che è assurdo. Quindi l'unica possibilità è che $\dim Z^3 = 0$, ovvero che X sia rc(V^1, V^σ, V^3)-connessa rispetto a tre famiglie non spezzanti. Allora dalla Proposizione 2.3.9 deduciamo che $\rho_X = 3$. □

Corollario 3.2.5. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e che ammette una famiglia V^1 di curve razionali dominante e non spezzante tale che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$. Allora*

i. ogni altro raggio estremale di X è associato o ad una contrazione di tipo fibrato o ad uno scoppiamento liscio; in quest'ultimo caso le fibre non banali di ogni scoppiamento hanno dimensione uguale ad i_X;

ii. *la classe di equivalenza* $[V^1]$ *è contenuta in un raggio estremale* R_1 *di* X *associato ad una contrazione di tipo fibrato;*

iii. *i raggi* R_1 *ed* R_σ *generano una faccia estremale.*

Inoltre $\rho_X = 3$.

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.2.2 la varietà X soddisfa il punto (i). In particolare quindi X non ammette raggi estremali associati a contrazioni piccole e possiamo pertanto applicare la Proposizione 3.2.3 per ottenere i punt (ii) e (iii). Infine per la Proposizione 3.2.4 sappiamo che $\rho_X = 3$. □

Possiamo quindi descrivere esplicitamente il cono di Kleimann–Mori della varietà X, dimostrando che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2\rangle$ dove R_1 è un raggio fibrato generato da $[V^1]$, mentre R_2 è associato o anch'esso ad una contrazione di tipo fibrato oppure ad uno scoppiamento.

Teorema 3.2.6. *Sia* X *una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e che ammette una famiglia* V^1 *di curve razionali dominante e non spezzante tale che* $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$. *Allora* $\rho_X = 3$ *e vale una tra le seguenti:*

i. $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2\rangle$ *dove* R_1 *ed* R_2 *sono raggi estremali associati a contrazioni di tipo fibrato;*

ii. $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2\rangle$ *con* R_1 *associato ad una contrazione di tipo fibrato ed* R_2 *associato ad uno scoppiamento liscio, le cui fibre hanno dimensione* i_X.

Inoltre $[V^1] \in R_1$.

Dimostrazione. Dal Corollario 3.2.5 sappiamo che $\rho_X = 3$, X non ha contrazioni piccole ed ammette un raggio estremale R_1, associato ad una contrazione di tipo fibrato, tale che $[V^1] \in R_1$. Inoltre R_σ ed R_1 generano una faccia estremale in NE(X).
Sia ora R_2 un altro raggio estremale di X che non appartiene alla faccia generata da $\langle R_\sigma, R_1\rangle$. Allora, per il punto (i) del Corollario 3.2.5, sappiamo che R_2 è associato o ad una contrazione di tipo fibrato o ad uno scoppiamento liscio le cui fibre non banali hanno lunghezza i_X.

Supponiamo che la contrazione associata ad R_2 sia di tipo fibrato e mostriamo di essere nel caso (i) dell'enunciato.
Consideriamo una famiglia $[V^2] \in R_2$ orizzontale e dominante rispetto all'rc(V^1)-fibrazione, che esiste sempre per il Teorema 2.3.2. Possiamo quindi applicare il Lemma 2.3.11 e poiché $\rho_X = 3$ ed abbiamo escluso che X abbia

contrazioni piccole, deduciamo che R_1 ed R_2 sono contenuti in una faccia estremale di NE(X). Mostriamo dunque che anche R_σ ed R_2 giacciono su una faccia estremale di NE(X).
Notiamo che $Exc(R_\sigma) \cdot R_2$ non può essere negativo, perché altrimenti ogni curva la cui classe di equivalenza è contenuta in R_2 sarebbe contenuta in $Exc(R_\sigma)$. In particolare avremmo $Exc(R_2) \subseteq Exc(R_\sigma)$, ma

$$\dim X = \dim Exc(R_2) > \dim Exc(R_\sigma) = \dim X - 1.$$

Dunque $Exc(R_\sigma) \cdot R_2 \geq 0$.

Supponiamo che valga la disuguaglianza stretta. Sia V^{R_2} una famiglia di deformazione di una curva minima la cui classe di equivalenza appartiene ad R_2 e sia V^σ una famiglia di deformazione di una curva minima in R_σ orizzontale e dominante rispetto alla rc(V^{R_2})-fibrazione. Siccome $\rho_X = 3$, la varietà X non è rc(V^{R_2}, V^σ)-connessa e dunque possiamo riapplicare il Lemma 2.3.11 per mostrare che R_2 ed R_σ stanno sulla stessa faccia estremale di $NE(X)$. Dunque $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$.
Se invece $Exc(R_\sigma) \cdot R_2 = 0$, assumiamo per assurdo che esista un raggio estremale R_3 nel semispazio di $NE(X)$ delimitato da $\langle R_\sigma, R_2 \rangle$ e non contenente R_1. Allora poiché $Exc(R_\sigma) \cdot R_2 = 0$ e $Exc(R_\sigma) \cdot R_1 > 0$, dev'essere che $Exc(R_\sigma) \cdot R_3 < 0$. Dunque $Exc(R_3) \subseteq Exc(R_\sigma)$ e pertanto R_3 dev'essere associato ad uno scoppiamento liscio. Infatti se così non fosse, per la Proposizione 3.2.2 il raggio R_3 sarebbe associato ad una contrazione di tipo fibrato, ma allora

$$\dim Exc(R_3) = \dim X > \dim X - 1 = \dim Exc(R_\sigma)$$

che è assurdo per quanto appena dimostrato. Poiché R_1, R_2 sono associati a contrazioni di tipo fibrato e abbiamo mostrato che $Exc(R_3) \subseteq Exc(R_\sigma)$, possiamo allora scegliere delle fibre F_σ, F_1, F_2 ed F_3 (associate rispettivamente ai raggi R_σ, R_1, R_2, R_3) che s'incontrano in un punto $x_3 \in Exc(R_3)$. Dall'Osservazione 2.4.11 ricaviamo che

$$\begin{aligned} 3i_X = \dim X &\geq \dim F_\sigma + \dim F_1 + \dim F_2 + \dim F_3 \\ &\geq (i_X + 1) + (i_X - 1) + (i_X - 1) + i_X \\ &\geq 4i_X - 1 \end{aligned}$$

da cui deduciamo che $0 \geq i_X - 1 > 2 - 1 = 1$, che è assurdo. Dunque $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$.

Supponiamo ora invece che la contrazione associata ad R_2 sia birazionale e mostriamo che siamo nel caso (ii) dell'enunciato.

Per quanto visto nella prima parte della dimostrazione e per la Proposizione 3.2.2 possiamo supporre che R_2 ed ogni altro raggio diverso da R_1 sia associato ad uno scoppiamento liscio.
Se $Exc(R_2) \cdot R_1 > 0$ allora una famiglia di deformazione V^2 di una curva minima in R_2 è orizzontale e dominante rispetto all'rc(V^1)-fibrazione $\pi : X \dashrightarrow Z$. Poiché $\rho_X = 3$, la varietà X non può essere rc(V^1, V^2)-connessa per la Proposizione 2.3.9. Dunque, poiché con il Corollario 3.2.5 avevamo escluso la presenza di contrazioni piccole, possiamo applicare il Lemma 2.3.11 e dedurre che R_1 ed R_2 sono contenuti in una faccia estremale di $NE(X)$.
Se invece $Exc(R_2) \cdot R_1 = 0$, possiamo dimostrare che $Exc(R_2) \cdot R_\sigma > 0$ e che $NE(Exc(R_2)) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$. Infatti siccome per ipotesi sappiamo che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$, allora una famiglia di deformazioni V^σ di una curva minima in R_σ è orizzontale e dominante rispetto alla rc(V^1)-fibrazione, dunque possiamo considerare l'rc(V^1, V^σ)-fibrazione. Una generica fibra F di tale fibrazione deve contenere Locus$(V^1)_{F_\sigma}$, dunque

$$\dim F \geq \dim Locus(V^1)_{F_\sigma} \geq \dim F_\sigma - K_X \cdot V^1 - 1 \geq \ell(R_\sigma) + i_X - 1 \geq 2i_X.$$

Sia ora V^{R_2} una famiglia di deformazioni di una curva minimale in R_2 e mostriamo che le famiglie V^1, V^σ e V^{R_2} sono numericamente indipendenti. Se per assurdo non lo fossero allora potremmo trovare una curva $\mathcal{C}_1 \in V^1$ numericamente equivalente ad una combinazione lineare $\lambda_\sigma \mathcal{C}_\sigma + \lambda_{R_2} \mathcal{C}_{R_2}$ con $\mathcal{C}_\sigma \in V^\sigma$ e $\mathcal{C}_{R_2} \in V^{R_2}$. Ma allora, poiché R_1 è estremale, avremmo che anche le classi di equivalenza $[\mathcal{C}_\sigma]$ e $[\mathcal{C}_{R_2}]$ sono contenute in R_1, che è assurdo perché per ipotesi avevamo $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$.
Possiamo allora applicare la Proposizione 1.3.9 trovando

$$\dim Locus(V^{R_2})_F \geq \dim F - K_X \cdot V^{R_2} - 1 \geq 2i_X + i_X - 1 = \dim X - 1.$$

Inoltre, siccome R_2 è associato ad uno scoppiamento liscio, abbiamo che anche $Exc(R_2) = \dim X - 1$, dunque $Exc(R_2) = Locus(V^{R_2})_F$ ed allora $NE(Exc(R_2)) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$. Infatti dal Lemma 1.3.20 sappiamo che ogni curva $\mathcal{C}$ contenuta in $Exc(R_2)$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare del tipo $\lambda_2 \mathcal{C}_2 + \lambda_F \mathcal{C}_F$, con $\lambda_F \geq 0$. Inoltre, siccome per il Lemma 2.3.11 sappiamo che $\langle R_\sigma, R_1 \rangle$ è estremale, applicando il Corollario 1.3.22, troviamo che anche $\lambda_2 \geq 0$ e dunque $NE(Exc(R_2)) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$.

Siccome poi $Exc(R_2) \cdot R_2 < 0$ ed $Exc(R_2) \cdot R_1 = 0$, segue che $Exc(R_2) \cdot R_\sigma > 0$ perché un divisore effettivo non può essere non positivo su tutto il cono $NE(X)$.
Assumiamo ora per assurdo che R_1 ed R_2 non siano contenuti in una faccia estremale di $NE(X)$ e che esista dunque un raggio estremale R_3 nel

semispazio di $NE(X)$ limitato da $\langle R_1, R_2\rangle$ e che non contenga R_σ. Allora $Exc(R_2) \cdot R_3 < 0$, dunque $Exc(R_3) \subset Exc(R_2)$, ma questo è assurdo perché avevamo dimostrato che che $NE(Exc(R_2)) = \langle R_\sigma, R_1, R_2\rangle$.
Poiché questo argomento può essere applicato ad ogni raggio diverso da R_1 ed R_σ, segue che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2\rangle$ e dunque siamo nel caso (ii) dell'enunciato. □

Nel Capitolo seguente vedremo alcuni esempi per entrambi i casi del Teorema 3.2.6.

3.3 Cono di Kleimann–Mori per $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$

In questa sezione ci occuperemo di studiare il caso di varietà di Fano X che soddisfano le Ipotesi 3.1.7, ma in cui non esiste nessuna famiglia V^1 di curve razionali dominante e non spezzante tale che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 > 0$. Dimostreremo che anche in questo caso X ha numero di Picard $\rho_X = 3$ e dimostreremo che nel cono $NE(X)$ esiste un altro raggio R_τ associato ad uno scoppiamento liscio tale che $Exc(R_\tau) \cdot V^1 > 0$. Se inoltre assumiamo che la varietà X non ammetta raggi estremali associati a contrazioni piccole, dimostreremo che il cono $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_\tau\rangle$ dove R_1 è un raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato.

Iniziamo dimostrando che nel cono $NE(X)$, oltre ad R_σ, esiste sempre almeno un altro raggio associato ad uno scoppiamento liscio e che non ci può essere più di un raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato.

Proposizione 3.3.1. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Allora esiste almeno un raggio R_τ tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R_\tau > 0$ e tutti i raggi per cui vale questa condizione sono associati a scoppiamenti lisci la cui fibra ha dimensione i_X.*

Dimostrazione. Dal Lemma 2.4.1 sappiamo che esiste un raggio R_τ tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R_\tau > 0$, dunque in particolare R_τ non è associato ad una contrazione di tipo fibrato e $R_\tau \notin \langle [V^1], R_\sigma\rangle$. Infatti, se per assurdo la contrazione associata ad R_τ fosse di tipo fibrato, avremmo che una famiglia minima dominante di curve di R_τ sarebbe non spezzante ed avrebbe intersezione positiva con $Exc(R_\sigma)$, contro le ipotesi.
Allora, indicata con F_τ ed F_σ una fibra non banale della contrazione associata rispettivamente ad R_τ ed R_σ, abbiamo che $F_\tau \cap Locus(V^1)_{F_\sigma} \neq \emptyset$. Grazie

al Lemma 1.3.20 notiamo che tale intersezione deve avere dimensione nulla, per cui utilizzando la Proposizione 1.3.9 troviamo che

$$\begin{aligned}\dim F_\tau &\leq \dim X - \dim Locus(V^1)_{F_\sigma}\\ &\leq 3i_X - \big(\dim F_\sigma - K_X \cdot V^1 - 1\big)\\ &\leq 3i_X - (i_X + 1 + i_X - 1) = i_X.\end{aligned}$$

Inoltre, poiché F_τ non è associato ad una contrazione di tipo fibrato, abbiamo che $\dim Exc(R_\tau) \leq \dim X - 1$, pertanto utilizzando il Teorema 1.4.7 deduciamo che

$$\dim F_\tau + \dim X - 1 \geq \dim F_\tau + \dim Exc(R_\tau) \geq \dim X - 1 + \ell(R_\tau)$$

da cui ricaviamo che $\dim F_\tau \geq \ell(R_\tau) \geq i_X$ e pertanto deve valere l'uguaglianza. Allora, per il Teorema 1.4.8 sappiamo che la contrazione associata ad R_τ è uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X. □

Corollario 3.3.2. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Allora X ha al più un raggio fibrato.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che nel cono $NE(X)$ ci siano due raggi estremali R_1, R_2 entrambi associati ad una contrazione di tipo fibrato. Siccome per la Proposizione 3.3.1 sappiamo che esiste un raggio R_τ associato ad uno scoppiamento tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R_\tau > 0$, l'intersezione dei luoghi eccezionali degli scoppiamenti $Exc(R_\sigma) \cap Exc(R_\tau)$ è non vuota. Possiamo quindi scegliere un punto $x \in Exc(R_\sigma) \cap Exc(R_\tau)$ ed indicare con F_τ, F_σ, F_1 ed F_2 le fibre di x delle contrazioni associate rispettivamente ai raggi $R_\tau, R_\sigma, R_1, R_2$. Siccome fibre di raggi estremali distinti possono incontrarsi in al più punti, utilizzando l'Osservazione 2.4.11 e ricordando che per ipotesi $i_X > 2$, troviamo che

$$\begin{aligned}\dim X &\geq \dim F_\tau + \dim F_\sigma + \dim F_1 + \dim F_2\\ &\geq i_X + (i_X + 1) + i_X - 1 + i_X - 1\\ &\geq \dim X + i_X - 1\\ &> \dim X + 1\end{aligned}$$

che è assurdo. Dunque ci può essere al più un raggio estremale associato ad una contrazione di tipo fibrato. □

Prima di proseguire con lo studio del cono $NE(X)$ vogliamo dimostrare che il numero di Picard $\rho_X = 3$.
Per farlo ci servirà sapere che le famiglie V^1, V^2 e V^σ sono numericamente indipendenti e che la famiglia di curve razionali V^2 è non spezzante.

Lemma 3.3.3. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Consideriamo V^2 famiglia di curve razionali come nella Costruzione 2.3.3 e V^σ famiglia di deformazione di una curva minima in R_σ. Allora $Exc(R_\sigma) \cdot V^2 \geq 0$ e le famiglie di curve razionali V^1, V^2 e V^σ sono numericamente indipendenti.*

Dimostrazione. Sia V^1 una famiglia di curve razionali dominante, allora per ipotesi $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Dunque $Exc(R_\sigma)$ non può dominare l'rc(V^1)-fibrazione $\pi_1 \colon X \dashrightarrow Z^1$. Siccome invece per costruzione V^2 domina tale fibrazione, ne consegue che $Exc(R_\sigma)$ non contiene $Locus(V^2)$ e dunque $Exc(R_\sigma) \cdot V^2 \geq 0$.
Supponiamo per assurdo che $[V^\sigma] \in \langle [V^1], [V^2] \rangle$, ovvero che esistano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che $[V^\sigma] = a[V^1] + b[V^2]$. Intersecando con $Exc(R_\sigma)$, troviamo che $Exc(R_\sigma) \cdot V^\sigma < 0$ e $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$; dunque, siccome $Exc(R_\sigma) \cdot V^2 \geq 0$, deduciamo che $b < 0$. Sia ora H_1 il pullback di un fibrato molto ampio su Z^1. Poiché le curve parametrizzate da V^1 sono contratte da π_1 abbiamo che $H_1 \cdot V^1 = 0$. Considerando l'intersezione con H_1, abbiamo che H_1 è positivo al di fuori del luogo di indeterminazione di π_1, dunque in particolare $H_1 \cdot V^2 > 0$ perché V^2 è orizzontale rispetto a π_1. Inoltre, siccome il luogo di indeterminazione di π_1 ha codimensione almeno due in X mentre $Exc(R_\sigma)$ è un divisore, segue che $H_1 \cdot R_\sigma > 0$. Intersecando quindi $[V^\sigma] = a[V^1] + b[V^2]$ con H_1 troviamo che $b > 0$, in contraddizione con quanto dimostrato precedentemente. Dunque le curve di R_σ non vengono contratte dall'rc(V^1, V^2)-fibrazione $\pi_2 \colon X \dashrightarrow Z^2$ e le famiglie V^1, V^2, V^σ sono numericamente indipendenti. $\square$

Proposizione 3.3.4. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R\sigma) \cdot V^1 = 0$. Consideriamo V^2 famiglia di curve orizzontali come nella Costruzione 2.3.3. Allora la famiglia V^2 è non spezzante.*

Dimostrazione. Dal Lemma 3.3.3 sappiamo che le famiglie V^1, V^2, V^σ sono numericamente indipendenti, pertanto se consideriamo l'rc(V^1, V^2)-fibrazione $\pi_2 \colon X \to Z^2$, le curve contenute in R_σ non vengono contratte da π_2, quindi dev'essere $\dim Z^2 \geq \dim F_\sigma$. Inoltre una fibra generica di π_2 contiene $Locus(V^2, V^1)_{x_2}$, dunque

$$\dim X - \dim Locus(V^2, V^1)_{x_2} \geq \dim Z_2 \geq \dim F_\sigma$$

da cui ricaviamo $\dim X - \dim F_\sigma \geq \dim Locus(V^2, V^1)_{x_2}$. Se ora calcoliamo esplicitamente le dimensioni troviamo

$$\begin{aligned} 3i_X - (i_X + 1) = \dim X - \dim F_\sigma &\geq \dim Locus(V^2, V^1)_{x_2} \\ &\geq -K_X \cdot V^2 - K_X \cdot V^1 - 2 \\ &\geq -K_X \cdot V^2 + i_X - 2 \end{aligned}$$

da cui ricaviamo che $-K_X \cdot V^2 \leq i_X + 1$, dunque V^2 dev'essere non spezzante perché se lo fosse avremmo $-K_X \cdot V^2 \geq 2i_X$. □

Arrivati a questo punto possiamo dimostrare che la famiglia V^2, scelta seguendo la Costruzione 2.3.3, oltre ad essere non spezzante è anche non dominante. Questo ci permetterà di dimostrare che X è rc(V^1, V^2, V^σ)-connessa e concludere che il numero di Picard $\rho_X = 3$.

Proposizione 3.3.5. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7. Assumiamo che per ogni famiglia V^1 di curve razionali dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$ e sia V^2 una famiglia di curve razionali come nella Costruzione 2.3.3. Allora V^2 non è dominante e X è rc(V^1, V^2, V^σ)-connessa. In particolare $\rho_X = 3$.*

Dimostrazione. Grazie alla Proposizione 3.3.4 sappiamo che la famiglia V^2 è non spezzante. Mostriamo ora che non è nemmeno dominante.
Supponiamo per assurdo che lo sia e consideriamo $Locus(V^1, V^2)_{F_\sigma}$, con F_σ una fibra generica non banale della contrazione elementare associata ad R_σ. Poiché stiamo supponendo V^1 e V^2 dominanti, sappiamo per ipotesi che $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = Exc(R_\sigma) \cdot V^2 = 0$, da cui segue che ogni curva in $Locus(V^1, V^2)_{F_\sigma}$ ha intersezione non positiva con $Exc(R_\sigma)$. Dunque $Locus(V^1, V^2)_{F_\sigma} \subseteq Exc(R_\sigma)$. Possiamo utilizzare quindi la Proposizione 1.3.9 e l'Osservazione 2.4.11 per calcolare

$$\begin{aligned} \dim Locus(V^1, V^2)_{F_\sigma} &\geq \dim F_\sigma - K_X \cdot V^1 - K_X \cdot V^2 - 2 \\ &\geq \ell(R_\sigma) + 2i_X - 2 \\ &\geq 3i_X - 1 \\ &= \dim X - 1 \end{aligned}$$

dunque $Locus(V^1, V^2)_{F_\sigma} = Exc(R_\sigma)$. Allora per il Corollario 1.3.21 sappiamo che ogni curva contenuta in $Exc(R_\sigma)$ è numericamente equivalente ad una combinazione lineare del tipo $\lambda_1 \mathcal{C}_1 + \lambda_2 \mathcal{C}_2 + \lambda_\sigma \mathcal{C}_\sigma$ a coefficienti razionali. Applicando il Lemma 1.3.20 ed il Corollario 1.3.22 deduciamo che i coefficienti $\lambda_1, \lambda_\sigma \geq 0$.
Inoltre, siccome stiamo supponendo V^2 dominante, possiamo scambiare i ruoli delle famiglie V^1 e V^2, trovando che anche $Locus(V^2, V^1)_{F_\sigma} \subseteq Exc(R_\sigma)$ e,

siccome le dimensioni coincidono, deduciamo che $Locus(V^2, V^1)_{F_\sigma} = Exc(R_\sigma)$. Dunque per il Corollario 1.3.22 troviamo che anche i coefficienti $\lambda_2, \lambda_\sigma \geq 0$ e quindi ogni curva in $Exc(R_\sigma)$ può essere scritta come combinazione lineare a coefficienti non negativi di curve appartenenti alle classi di equivalenza di $[V^1], [V^2], [V^\sigma]$. Pertanto $NE(Exc(R_\sigma)) = \langle [V^1], [V^2], [V^\sigma] \rangle$.
Ora, per il Lemma 2.4.1 sappiamo che esiste almeno un raggio estremale che è postivo rispetto ad $Exc(R_\sigma)$, ed il Corollario 2.4.2 garantisce che la contrazione associata a tale raggio è un $\mathbb{P}^1$-fibrato. Dunque una famiglia di deformazione di una curva minima in tale raggio è dominante, non spezzante ed ha intersezione positiva rispetto a $Exc(R_\sigma)$, contro le ipotesi. Per questo motivo V^2 non può essere una famiglia di curve razionali dominante.

Sia ora $x_2 \in Locus(V^2)$ un punto generico e servendoci della Proposizione 1.3.9 e dell'Osservazione 1.3.10 calcoliamo

$$\begin{aligned} \dim Locus(V^2, V^1)_{x_2} &= \dim Locus(V^1)_{Locus(V^2)_{x_2}} \\ &\geq \dim Locus(V^2)_{x_2} - K_X \cdot V^1 - 1 \\ &\geq i_X + i_X - 1 = 2i_X - 1. \end{aligned}$$

Allora, se consideriamo l'rc(V^1, V^2)-fibrazione $\pi_2 \colon X \dashrightarrow Z^2$ troviamo che

$$\dim Z^2 \leq \dim X - (2i_X - 1) = i_X + 1$$

dunque, siccome per il Lemma 3.3.3 sappiamo che le famiglie V^1, V^2, V^σ sono numericamente indipendenti, e una fibra generale non banale F_σ dello scoppiamento associato ad R_σ ha dimensione $i_X + 1$, otteniamo che F_σ domina Z^2. Pertanto X è rc(V^1, V^2, V^σ)-connesso. Inoltre, applicando la Proposizione 2.3.9 troviamo che $\rho_X = 3$. $\square$

Osservazione 3.3.6. Osserviamo che nella dimostrazione della Proposizione 3.3.5 è sufficiente assumere che la famiglia di curve razionali V^2 sia orizzontale e dominante rispetto all'rc$(\mathcal{V}^1)$-fibrazione, senza richiedere che sia minima.

Dalla Proposizione 3.3.1 sappiamo che nel cono di Kleimann–Mori di X esiste almeno un raggio R_τ associato ad uno scoppiamento. Indicata con V^τ una famiglia di deformazione di una curva minima contenuta in tale raggio, possiamo mostrare che X è rc(V^1, V^τ, V^σ)-connessa. Per farlo ci servirà prima dimostrare che $Exc(R_\tau) \cdot V^1 > 0$.

Teorema 3.3.7. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R\sigma) \cdot V^1 = 0$. Allora esiste un raggio estemale R_τ associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X e tale che $Exc(R_\tau) \cdot V^1 >$*

0 ed $Exc(R_\sigma) \cdot V^\tau > 0$, dove V^τ è una famiglia di deformazione di una curva minima contenuta in R_τ.

Dimostrazione. Dalla Proposizione 3.3.1 sappiamo che in $NE(X)$ esiste un raggio R_τ associato ad uno scoppiamento liscio, le cui fibre hanno dimensione i_X e tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R_\tau > 0$. Allora, se consideriamo una famiglia di deformazione di una curva minima V^τ del raggio R_τ, abbiamo che $Exc(R_\sigma) \cdot V^\tau > 0$.

Supponiamo ora per assurdo che $Exc(R_\tau) \cdot V^1 = 0$. Allora siccome X è rc(V^1, V^2, V^σ)-connessa per la Proposizione 3.3.5 ed $Exc(R_\tau) \cdot V^\sigma > 0$, segue che $Exc(R_\tau) \cdot V^2 < 0$. Tuttavia siccome $Exc(R_\tau)$ non domina l'rc(V^1)-fibrazione $\pi_1 \colon X \dashrightarrow Z^1$, mentre V^2 per costruzione sì, allora $Exc(R_\tau)$ non può contenere $Locus(V^2)$ ed $Exc(R_\tau) \cdot V^2 \geq 0$, in contraddizione con quanto appena dimostrato. Dunque deve essere $Exc(R_\tau) \cdot V^1 > 0$. □

Teorema 3.3.8. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Allora la varietà X è rc(V^1, V^τ, V^σ)-connessa.*

Dimostrazione. Per il Teorema 3.3.7 sappiamo che esiste un raggio estremale R_τ associato ad uno scoppiamento liscio che soddisfa $Exc(R_\tau) \cdot V^1 > 0$, dunque una famiglia di deformazione V^τ di una curva minima in R_τ è non spezzante, orizzontale e dominante rispetto all'rc(V^1)-fibrazione.
Notiamo che la famiglia V^τ non può essere dominante perché

$$\dim X - 1 = \dim Exc(R_\tau) \geq \dim Locus(V^\tau)_{x_\tau}$$

con $x_\tau \in Locus(V^\tau)$. Allora per la Proposizione 3.3.5 e l'Osservazione 3.3.6 possiamo concludere che X è rc(V^1, V^τ, V^σ)-connesso. □

Concentriamoci ora sullo scoppiamento $\sigma \colon X \to Y$ e supponiamo che Y non sia una varietà di Fano. Allora possiamo dimostrare che esiste un raggio estremale associato ad una contrazione piccola.

Proposizione 3.3.9. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Se esiste un raggio R_S tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R_S < 0$, allora*

$$\dim X - 2 \geq \dim Exc(R_S) \geq 2i_X + 1.$$

In particolare R_S è associato ad una contrazione piccola.

Dimostrazione. Siccome per ipotesi $Exc(R_\sigma) \cdot R_S < 0$, ogni curva la cui classe di equivalenza numerica appartiene ad R_S è contenuta in $Exc(R_\sigma)$, in particolare $Exc(R_S) \subseteq Exc(R_\sigma)$. Possiamo quindi scegliere un punto $x \in Exc(R_S)$ e considerare le fibre F_S ed F_σ rispetto alle contrazioni associate ai raggi R_S ed R_σ rispettivamente. Siccome fibre di raggi diversi s'incontrano in al più punti, abbiamo che

$$\dim X - 1 = \dim Exc(R_\sigma) \geq \dim F_S + \dim F_\sigma,$$

pertanto possiamo stimare la dimensione della fibra F_S

$$\begin{aligned}\dim F_S &\leq \dim X - 1 - \dim F_\sigma \\ &\leq 3i_X - 1 - (i_X + 1) \\ &= 2i_X - 2.\end{aligned}$$

Utilizzando quindi il Teorema 1.4.7 possiamo calcolare

$$\begin{aligned}\dim Exc(R_S) &\geq \dim X - 1 + \ell(R_S) - \dim F_S \\ &\geq 3i_X - 1 + i_X - (2i_X - 2) \\ &= 2i_X + 1.\end{aligned}$$

Mostriamo ora che $\dim X - 2 \geq \dim Exc(R_S)$, ovvero che R_S è associato ad una contrazione piccola. Siccome $Exc(R_S) \subseteq Exc(R_\sigma)$, allora $\dim Exc(R_S) \leq \dim Exc(R_\sigma) = \dim X - 1$, pertanto la contrazione associata ad R_S non può essere di tipo fibrato. Supponiamo per assurdo che sia una contrazione divisoriale, ovvero che $\dim Exc(R_S) = \dim X - 1$ e dunque $Exc(R_S) = Exc(R_\sigma)$. Grazie alla Proposizione 3.3.1 sappiamo che deve esistere un raggio R_τ associato ad uno scoppiamento le cui fibre hanno dimensione $\dim F_\tau = i_X$, tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R_\tau > 0$. Pertanto l'intersezione dei tre luoghi eccezionali $Exc(R_S) \cap Exc(R_\sigma) \cap Exc(R_\tau)$ è non vuota. Possiamo quindi scegliere un punto x in tale intersezione e considerare le sue fibre F_S, F_σ, F_τ rispetto alle contrazioni associate rispettivamente ad R_S, R_σ, R_τ. Siccome tali fibre sono associate a raggi estremali distinti, s'intersecano in al più punti, pertanto utilizzando l'Osservazione 2.4.11 troviamo che

$$\begin{aligned}\dim X &\geq \dim F_S + \dim F_\sigma + \dim F_\tau \\ &\geq i_X + (i_X + 1) + i_X \\ &= \dim X + 1\end{aligned}$$

che è assurdo. Pertanto $\dim Exc(R_S) \leq \dim X - 2$, quindi R_S è associato ad una contrazione piccola.

□

Corollario 3.3.10. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Consideriamo lo scoppiamento $\sigma\colon X \to Y$ associato al raggio R_σ. Se Y non è una varietà di Fano, allora esiste un raggio estremale R_S associato ad una contrazione piccola.*

Dimostrazione. Se Y non è una varietà di Fano allora per la Proposizione 2.4.5 sappiamo che esiste un raggio R_S che non viene contratto dallo scoppiamento σ, ma tale che $Exc(R_\sigma) \cdot R < 0$. Allora per la Proposizione 3.3.9 possiamo concludere che R_S è associato ad una contrazione piccola. □

Arrivati a questo punto, richiedendo in aggiunta che $Exc(R_\sigma) \cdot R \geq 0$ per ogni raggio R diverso da R_σ, possiamo dimostrare che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_\tau \rangle$ con R_1 raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato ed R_τ raggio associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X.

Teorema 3.3.11. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Se $Exc(R_\sigma) \cdot R \geq 0$ per ogni raggio R nel cono $NE(X)$ diverso da R_σ, allora $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_\tau \rangle$ con R_1 raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato ed R_τ raggio associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X.*

Dimostrazione. Dal Teorema 3.3.7 sappiamo che esiste un raggio R_τ associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno lunghezza i_X. Inoltre, per il Teorema 3.3.8 sappiamo che X è rc(V^1, V^τ, V^σ)-connessa, con V^τ, V^σ famiglie di deformazione di una curva minima di R_τ ed R_σ rispettivamente. Consideriamo la contrazione $\tau\colon X \to Y$ associata ad R_τ. Notiamo che Y ha la stessa dimensione di X ma numero di Picard $\rho_Y = 2$; inoltre Y è rc$(\tau(V^1), \tau(V^\sigma))$-connessa e $\tau(V^1), \tau(V^\sigma)$ sono numericamente indipendenti perché lo erano anche V^1 e V^σ per il Lemma 3.3.3.
Indichiamo con $A = \tau(Locus(V^\sigma)_{F_\tau})$ e $B = \tau(Locus(V^1)_{F_\tau})$, dove F_τ è una fibra generica della contrazione τ. Notiamo che siccome F_τ è generica e V^1 è dominante, si ha che $Locus(V^1)_{F_\tau} \neq \emptyset$, inoltre anche $Locus(V^\sigma)_{F_\tau} \neq \emptyset$ per il Teorema 3.3.7. Quindi, utilizzando la Proposizione 1.3.9 e l'Osservazione 2.4.11, possiamo calcolare

$$\dim Locus(V^1)_{F_\tau} \geq \dim F_\tau - K_X \cdot V^1 - 1 \geq \ell(R_\tau) + i_X - 1 = 2i_X - 1,$$

e dunque $\dim B \geq 2i_X - 1$.
Ora, siccome ogni curva appartenente ad A è numericamente proporzionale all'immagine di una curva di V^σ ed ogni curva di B è numericamente proporzionale all'immagine di una curva di V^1, abbiamo che $\dim(A \cap B) = 0$.

Ma allora

$$\dim A \leq \dim Y - \dim B \leq 3i_X - (2i_X - 1) = i_X + 1 = \ell(R_\sigma) = \dim F_\sigma.$$

Dunque ogni fibra della contrazione σ che interseca F_τ è contenuta in $Exc(R_\tau)$, pertanto $Exc(R_\tau) \cdot R_\sigma = 0$.

Notiamo allora che $Exc(R_\sigma)$ è un divisore effettivo che per ipotesi soddisfa $Exc(R_\sigma) \cdot R \geq 0$ per ogni raggio R diverso da R_σ. Possiamo quindi applicare il Lemma 2.4.3 e dedurre che, siccome $Exc(R_\sigma) \cdot V = 0$, allora $[V]$ ed R_σ appartengono alla stessa faccia estremale. Mostriamo ora che anche $\langle [V^1], [V^\tau] \rangle$ è estremale. Siccome per il Teorema 3.3.8 sappiamo che X è $\mathrm{rc}(V^1, V^\tau, V^\sigma)$-connessa, allora $X = ChLocus(V^\tau, V^1)_{F_\sigma}$, dunque per il Lemma 1.3.20 possiamo scrivere ogni curva di X come una combinazione lineare $\lambda_1[V^1] + \lambda_\tau[V^\tau] + \lambda_\sigma[V^\sigma]$ a coefficienti non negativi per il Corollario 1.3.22. Allora, se $\mathcal{C}_a$ e $\mathcal{C}_b$ sono curve le cui classi numeriche soddisfano $[\mathcal{C}_a] + [\mathcal{C}_b] \in \langle [V^1], [V^\tau] \rangle$, si ha che anche $[\mathcal{C}_a], [\mathcal{C}_b] \in \langle [V^1], [V^\tau] \rangle$, ovvero che $\langle [V^1], [V^\tau] \rangle$ è estremale.
Quindi, siccome sia $\langle [V^1], [V^\sigma] \rangle$ che $\langle [V^1], [V^\tau] \rangle$ sono estremali, possiamo concludere che $[V^1]$ genera un raggio estremale di tipo fibrato, che è l'unico di questo tipo per il Corollario 3.3.2.

Supponiamo ora per assurdo che esista un altro raggio estremale R. Poiché abbiamo dimostrato che $\langle [V^1], [V^\tau] \rangle$ e $\langle [V^1], [V^\sigma] \rangle$ sono estremali, il raggio R deve stare nel semispazio delimitato da $\langle R_\tau, R_\sigma \rangle$ che non contiene R_1. Allora, siccome per il Teorema 3.3.7 si ha che $Exc(R_\tau) \cdot R_1 > 0$ ed inoltre $Exc(R_\tau) \cdot R_\tau < 0$ ed abbiamo appena dimostrato che $Exc(R_\tau) \cdot R_\sigma = 0$, deve essere $Exc(R_\tau) \cdot R < 0$.
Tuttavia, siccome $Locus(V^1)_{F_\sigma} \neq \emptyset$ (perché V^1 è dominante) e $Exc(R_\tau) \cdot R_1 > 0$, allora anche $Locus(V^1, V^\tau)_{F_\sigma} \neq \emptyset$, e quindi se ancora una volta usiamo il Lemma 1.3.11 e l'Osservazione 2.4.11 per calcolare

$$\begin{aligned} \dim Locus(V^1, V^\tau)_{F_\sigma} &\geq \dim F_\sigma - K_X \cdot V^1 - K_X \cdot V^\tau - 2 \\ &\geq (i_X + 1) + i_X + i_X - 2 \\ &= 3i_X - 1 = \dim X - 1 \end{aligned}$$

troviamo che $Exc(R_\tau) = Locus(V^1, V^\tau)_{F_\sigma}$. Pertanto applicando il Lemma 1.3.20 ed il Corollario 1.3.22, ricaviamo che ogni curva in $Exc(R_\tau)$ può essere scritta come combinazione lineare a coefficienti non negativi di curve appartenenti alle classi di equivalenza numerica di $[V^1], [V^\tau]$ e $[V^\sigma]$. Dunque $NE(Exc(R_\tau)) = \langle R_\sigma, R_\tau, R_1 \rangle$, contraddicendo $Exc(R_\tau) \cdot R < 0$. Ma allora non può esistere nessun altro raggio R e concludiamo quindi che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_\tau, R_1 \rangle$. □

Infine, anche nel caso in cui X non abbia raggi estremali associati a contrazioni piccole, possiamo descrivere esplicitamente il cono di Kleimann–Mori.

Teorema 3.3.12. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 e tale che per ogni famiglia di curve razionali V^1 dominante e non spezzante si abbia $Exc(R_\sigma) \cdot V^1 = 0$. Se inoltre X non ammette raggi associati a contrazioni piccole, allora $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_\tau \rangle$ con R_1 raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato ed R_τ raggio associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X.*

Dimostrazione. Siccome X non ammette raggi associati a contrazioni piccole, grazie alla Proposizione 3.3.9 troviamo che $Exc(R_\sigma) \cdot R \geq 0$ per ogni raggio R nel cono $NE(X)$ diverso da R_σ. Dunque possiamo applicare il Teorema 3.3.11 e concludere che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_\tau, R_1 \rangle$ con R_1 raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato ed R_τ raggio associato ad uno scoppiamento liscio le cui fibre hanno dimensione i_X. □

Capitolo 4

Esempi

4.1 Esempi

Mostriamo che entrambi i casi del Teorema 3.2.6 possono effettivamente verificarsi vedendo alcuni esempi.

Esempio 4.1.1. *La varietà* $X = (Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X}) \times \mathbb{P}^{i_X}$ *ha numero di Picard* $\rho_X = 3$ *e pseudoindice* $i_X = \frac{\dim X}{3}$. *Possiede un raggio associato ad uno scoppiamento di lunghezza* $i_X + 1$, *e due raggi associati ad una contrazione di tipo fibrato, dei quali uno di lunghezza* $i_X + 1$ *e l'altro di lunghezza* i_X.

Proposizione 4.1.2. *Sia* X *una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 con* $\rho_X = 3$. *Assumiamo che* X *ammetta una famiglia* V *di curve razionali dominante e non spezzante, positiva rispetto al luogo eccezionale* $Exc(R_\sigma)$ *dello scoppiamento associato ad* R_σ. *Se assumiamo inoltre che* $-K_X \cdot V = i_X$ *ed esista un raggio* R_2 *associato ad una contrazione di tipo fibrato che non contenga* $[V]$ *e tale che* $\ell(R_2) = i_X + 1$, *allora* $X \cong (Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X}) \times \mathbb{P}^{i_X}$.

Dimostrazione. Dal Corollario 3.2.5 e dal Teorema 3.2.6 sappiamo che il cono $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$, con R_1 ed R_2 raggi associati a contrazioni di tipo fibrato, $[V] \in R_1$ ed $\langle R_1, R_\sigma \rangle$ è una faccia estremale. Indichiamo con Φ la contrazione associata a tale faccia (che esiste sempre per il Teorema 1.4.3), con F_Φ una fibra generica di Φ e consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\Phi"'] & X' \arrow[d, "\Phi_1"] \\ & Y \end{tikzcd} .$$

Notiamo che siccome per ipotesi $Exc(R_\sigma) \cdot V > 0$, si ha che $Locus(V)_{F_\sigma} \neq \emptyset$; inoltre poiché per il Lemma 1.3.20 tutte le curve contenute in $Locus(V)_{F_\sigma}$

sono del tipo $\lambda_V \mathcal{C}_V + \lambda_\sigma \mathcal{C}_\sigma$ con $\mathcal{C}_V$ una curva in $[V]$ e $\mathcal{C}_\sigma$ una curva in R_σ, le curve di $Locus(V)_{F_\sigma}$ vengono contratte da Φ. Dunque $Locus(V)_{F_\sigma} \subset F_\Phi$ e

$$\dim F_\Phi \geq \dim Locus(V)_{F_\sigma} \geq (i_X + 1) + i_X - 1 = 2i_X.$$

Possiamo dimostrare che vale l'uguaglianza. Infatti poiché R_2 è associato ad una contrazione di tipo fibrato, una sua fibra F_2 interseca F_Φ e tale intersezione deve avere dimensione zero. Dunque

$$3i_X = \dim X \geq \dim F_\Phi + \dim F_2 \geq \dim F_\Phi + (i_X + 1) - 1 \geq 2i_X + i_X = 3i_X$$

da cui deduciamo che $\dim F_\Phi = 2i_X$. Tale fibra è una varietà di Fano con pseudoindice $i_{F_\Phi} = i_X$ perché grazie al Corollario 3.2.5 sappiamo che la classe di equivalenza $[V] \in \langle R_1 \rangle$ e la faccia $\langle R_1, R_\sigma \rangle$ è estremale. Notiamo che il raggio R_σ soddisfa

$$\begin{cases} i_X + \ell(R_\sigma) = 2i_X + 1 \\ \dim Exc(R_\sigma) + 2 = (2i_X - 1) + 2 = 2i_X + 1 \end{cases}$$

pertanto, applicando il Teorema 2.4.6, ricaviamo che $F_\Phi \cong Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}(\mathbb{P}^{2i_X})$. Allora la contrazione Φ_1 ha come fibra generica $\mathbb{P}^{2i_X}$ ed il raggio R_1' associato a Φ_1 in X' soddisfa $\ell(R_1') = 2i_X + 1$.
Lavoriamo ora su X' ed indichiamo con R_2' l'immagine di R_2 tramite lo scoppiamento σ. Notiamo che $\ell(R_2') = \ell(R_2) = i_X + 1$.
Siano W^1, W^2 due famiglie di deformazione di una curva minima rispettivamente in R_1' ed R_2' (dunque W^1, W^2 sono famiglie coprenti, non spezzanti e numericamente indipendenti). Poiché $\ell(R_1') = 2i_X + 1$ allora $-K_X \cdot W^1 = 2i_X + 1$ ed analogamente $-K_X \cdot W^2 = i_X + 1$, dunque X' è $\mathrm{rc}(W^1, W^2)$-connesso per la Proposizione 1.3.9. Possiamo dunque applicare il Teorema 2.3.5 e dedurre che $X' \cong \mathbb{P}^{2i_X} \times \mathbb{P}^{i_X}$, pertanto $X \cong (Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X}) \times \mathbb{P}^{i_X}$. $\square$

Esempio 4.1.3. *La varietà $X = (Bl_{\mathbb{P}^{i_X-2}}\mathbb{P}^{2i_X+1}) \times \mathbb{P}^{i_X-1}$ ha pseudoindice $i_X = \frac{\dim X}{3}$ e $\rho_X = 3$. Possiede un raggio associato ad uno scoppiamento di lunghezza $i_X + 1$ e due raggi associati a contrazioni di tipo fibrato, di cui uno di lunghezza i_X ed uno di lunghezza $i_X + 1$.*

Proposizione 4.1.4. *Sia X una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 con $\rho_X = 3$. Assumiamo che X ammetta una famiglia V di curve razionali domaninante e non spezzante, positiva rispetto al luogo eccezionale $Exc(R_\sigma)$ dello scoppiamento associato ad R_σ. Se assumiamo inoltre che $-K_X \cdot V = i_X + 1$ ed esista un raggio R_2 associato ad una contrazione di tipo fibrato che non contenga $[V]$ e tale che $\ell(R_2) = i_X$, allora $X \cong (Bl_{\mathbb{P}^{i_X-1}}\mathbb{P}^{2i_X+1}) \times \mathbb{P}^{i_X-1}$.*

Dimostrazione. Analogamente a quanto fatto nella dimostrazione della Proposizione precedente consideriamo il diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\Phi"] & X' \arrow[d, "\Phi_1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

in cui Φ è la contrazione associata alla faccia estremale $\langle R_1, R_\sigma \rangle$, σ è lo scoppiamento associato ad R_σ e calcoliamo la dimensione di F_Φ, fibra generica di Φ. Siccome $F_\Phi \supseteq Locus(V)_{F_\sigma} \neq \emptyset$ utilizzando il Lemma 1.3.11 troviamo che

$$\dim F_\Phi \geq \dim Locus(V)_{F_\sigma} \geq (i_X + 1) + (i_X + 1) - 1 = 2i_X + 1.$$

Inoltre poiché R_2 è associato ad una contrazione di tipo fibrato l'intersezione tra una sua generica fibra F_2 ed F_Φ è non vuota ed ha dimensione zero. Dunque

$$\dim F_\Phi \leq \dim X - \dim F_2 \leq 3i_X - (i_X - 1) = 2i_X + 1,$$

pertanto $\dim F_\Phi = 2i_X + 1$.
Siccome per l'Osservazione 2.4.11 abbiamo che $\dim F_{R_\sigma} \geq \ell(R_\sigma) \geq i_X + 1$, possiamo applicare il Teorema 1.4.8 ricavando che $F_\Phi \cong Bl_{\mathbb{P}^{i_X - 1}}(\mathbb{P}^{2i_X+1})$. Dunque la contrazione Φ_1 ha $\mathbb{P}^{2i_X+1}$ come fibra generica ed il raggio R'_1 associato a Φ_1 ha lunghezza $\ell(R'_1) = 2i_X + 2$.
Lavoriamo ora su X' e consideriamo W^1, W^2 due famiglie di deformazione di una curva minima rispettivamente in R'_1 ed R'_2, con R'_2 immagine di R_2 tramite lo scoppiamento σ. Poiché $\ell(R'_1) = 2i_X + 2$ allora $-K_X \cdot W^1 = 2i_X + 2$ ed analogamente $-K_X \cdot W^2 = i_X$, dunque X' è rc(W^1, W^2)-connesso per la Proposizione 1.3.9. Possiamo allora applicare il Teorema 2.3.5 e dedurre che $X' \cong \mathbb{P}^{2i_X+1} \times \mathbb{P}^{i_X - 1}$, pertanto $X \cong (Bl_{\mathbb{P}^{i_X-1}}\mathbb{P}^{2i_X+1}) \times \mathbb{P}^{i_X-1}$. □

Esempio 4.1.5. *La varietà* $X = Bl_{\mathbb{P}^{2i_X-2}}(Bl_{\mathbb{P}^{2i_X-1}}\mathbb{P}^{3i_X})$ *è una varietà di Fano con numero di Picard* $\rho_X = 3$ *e pseudoindice* $i_X = \frac{\dim X}{3}$*. Possiede due raggi estremali associati ad uno scoppiamento liscio, di cui uno di lunghezza* i_X *e l'altro di lunghezza* $i_X + 1$*, ed un raggio associato ad una contrazione di tipo fibrato.*

Proposizione 4.1.6. *Sia* X *una varietà di Fano che soddisfa le Ipotesi 3.1.7 con* $\rho_X = 3$*. Assumiamo che* X *ammetta una famiglia* V *di curve razionali dominante e non spezzante, positiva rispetto al luogo eccezionale* $Exc(R_\sigma)$ *dello scoppiamento associato ad* R_σ*. Se* X *ammette inoltre un ulteriore raggio estremale* R_2 *associato ad uno scoppiamento liscio* $X \to X'$ *e* X' *ha una contrazione birazionale, allora abbiamo che* $X = Bl_{\mathbb{P}^{2i_X-2}}(Bl_{\mathbb{P}^{2i_X-1}}\mathbb{P}^{3i_X})$*.*

Dimostrazione. Dal Teorema 3.2.6 sappiamo che $NE(X) = \langle R_\sigma, R_1, R_2 \rangle$ dove R_1 è un raggio di tipo fibrato che contiene la classe di equivalenza numerica $[V]$ e per ipotesi $Exc(R_\sigma) \cdot R_1 > 0$. Mostriamo che i luoghi eccezionali dei due scoppiamenti hanno intersezione non vuota e che quindi in particolare due delle loro fibre generiche non hanno intersezione vuota. Infatti se $Exc(R_2) \cdot R_1 = 0$ allora siccome $Exc(R_2) \cdot R_2 < 0$ per il Lemma 2.4.1 deve essere $Exc(R_2) \cdot R_\sigma > 0$. Nel caso in cui invece $Exc(R_2) \cdot R_1 > 0$ allora, per quanto visto nella seconda parte della dimostrazione del Teorema 3.2.6, sappiamo che $Exc(R_2) \cdot R_\sigma > 0$.
Consideriamo la contrazione Φ associata alla faccia estremale $\langle R_\sigma, R_1 \rangle$, indichiamo con F_Φ una sua generica fibra e consideriamo il seguente diagramma

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[dr, "\Phi"'] & X' \arrow[d, "\Phi_1"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Ragionando come nelle Proposizioni precedenti notiamo che per il Lemma 1.3.20 abbiamo che $Locus(V)_{F_\sigma} \subseteq F_\Phi$ e che

$$\dim Locus(V)_{F_\sigma} \geq (i_X + 1) + i_X - 1 = 2i_X$$

per il Lemma 1.3.11. Sia ora F_2 una fibra generica dello scoppiamento associato ad R_2. Poiché l'intersezione tra F_Φ ed F_2 non è vuota ed ha dimensione zero, abbiamo che

$$3i_X = \dim X \geq \dim F_\Phi + \dim F_2 \geq \dim F_\Phi + i_X.$$

Dunque $\dim F_\Phi = 2i_X$ ed F_Φ è una varietà di Fano con $i_{F_\Phi} = i_X$. Inoltre, siccome il raggio R_σ soddisfa le ipotesi del Teorema 2.4.6, troviamo che $F_\Phi = Bl_{\mathbb{P}^{i_x - 2}} \mathbb{P}^{2i_X}$.
Dunque $\mathbb{P}^{2i_X}$ è una fibra generica della contrazione Φ_1, il cui raggio estremale associato R_1' ha dunque lunghezza $\ell(R_1') = 2i_X + 1$.
Consideriamo ora la varietà di Fano X' con $\rho_{X'} = 2$. Siccome il raggio R_1' soddisfa l'uguaglianza del Teorema 2.4.7, allora o $X' = Bl_{\mathbb{P}^{2i_X - 1}} \mathbb{P}^{3i_X}$ oppure $NE(X') = \langle R_1', R \rangle$ con R associato ad una contrazione di tipo fibrato. Tuttavia quest'ultimo caso contraddice le ipotesi, dunque l'unica possibilità è che $X' = Bl_{\mathbb{P}^{2i_X - 1}} \mathbb{P}^{3i_X}$, pertanto possiamo concludere che $X = Bl_{\mathbb{P}^{2i_X - 2}} (Bl_{\mathbb{P}^{2i_X - 1}} \mathbb{P}^{3i_X})$. □

Bibliografia

[1] Andreatta, M., Chierici, E., and Occhetta, G., Generalized Mukai conjecture for special Fano varieties, Cent. Eur. J. Math. 2 (2004), no. 2, 272–293. https://doi.org/10.2478/BF02476544

[2] Andreatta, M. and Occhetta, G., Special rays in the Mori cone of a projective variety, Nagoya Math. J. 168 (2002), 127–137. https://doi.org/10.1017/S0027763000008400

[3] Andreatta, M. and Occhetta, G., Fano manifolds with long extremal rays, Asian J. Math. 9 (2005), no. 4, 523–543. https://doi.org/10.4310/AJM.2005.v9.n4.a5

[4] Bonavero, L., Campana, F., Wiśniewski, J. A. Variétés complexes dont l'éclatée en un point est de Fano. (French. English, French summary) [Complex manifolds whose blow-up at a point is Fano] C. R. Math. Acad. Sci. Paris Ser. I 334 (2002), no. 6, 463–468.

[5] Bonavero, L., Casagrande, C., Debarre, O., and Druel, S., Sur une conjecture de Mukai, Comment. Math. Helv. 78 (2003), no. 3, 601–626. https://doi.org/10.1007/s00014-003-0765-x

[6] Casagrande, C. The number of vertices of a Fano polytope. Annales de l'Institut Fourier, Volume 56 (2006) no. 1, pp. 121-130. doi : 10.5802/aif.2175.

[7] Casagrande, C. On the Picard number of divisors in Fano manifolds. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 45 (2012), no. 3, 363–403.

[8] Chierici, E. and Occhetta, G., The cone of curves of Fano varieties of coindex four, Internat. J. Math. 17 (2006), no. 10, 1195–1221. https://doi.org/10.1142/S0129167X06003850

[9] Chierici, E. and Occhetta, G., Fano manifolds and blow-ups of low-dimensional subvarieties, J. Korean Math. Soc. 47 (2010), no. 1, 189–213. https://doi.org/10.4134/JKMS.2010.47.1.189

[10] Cho, K., Miyaoka, Y., and Shepherd-Barron, N. I., Characterizations of projective space and applications to complex symplectic manifolds, in “Higher dimensional birational geometry (Kyoto, 1997)”, Adv. Stud. Pure Math., vol. 35, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2002, pp. 1–88.

[11] Ciliberto, C. and Sernesi, E., Families of varieties and the Hilbert scheme. Lectures on Riemann surfaces (Trieste, 1987), 428–499, World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.

[12] Dedieu, T., Höring, A., Numerical characterisation of quadrics. Algebr. Geom. 4 (2017), no. 1, 120–135.

[13] Fujita, T., Classification theories of polarized varieties. London Mathematical Society Lecture Note Series, 155. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[14] Hartshorne R., Algebraic geometry. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. xvi+496 pp. ISBN: 0-387-90244-9

[15] Kobayashi, S. and Ochiai, T., Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics, J. Math. Kyoto Univ. 13 (1973), 31–47. https://doi.org/10.1215/kjm/1250523432

[16] Kollár, J., Rational curves on algebraic varieties, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge., vol. 32, Springer-Verlag, Berlin, 1996. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03276-3

[17] Kollár, J., Miyaoka, Y., and Mori, S., Rational connectedness and boundedness of Fano manifolds, J. Differential Geom. 36 (1992), no. 3, 765–779.

[18] Kollár, J.; Mori, S., Birational geometry of algebraic varieties. With the collaboration of C. H. Clemens and A. Corti. Translated from the 1998 Japanese original. Cambridge Tracts in Mathematics, 134. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. viii+254 pp

[19] Ionescu, P., Generalized adjunction and applications. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 99 (1986), no. 3, 457–472. 14J10 (14C20 14J40)

[20] Mella, M., Existence of good divisors on Mukai varieties. J. Algebraic Geom. 8 (1999), no. 2

[21] Miyaoka, Y., Numerical characterisations of hyperquadrics. Complex analysis in several variables—Memorial Conference of Kiyoshi Oka's Centennial Birthday, 209–235, Adv. Stud. Pure Math., 42, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.

[22] Mori, S., Projective manifolds with ample tangent bundles, Ann. of Math. (2) 110 (1979), no. 3, 593–606. https://doi.org/10.2307/1971241

[23] Mori, S.,i Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective. Ann. of Math. (2) 116 (1982), no. 1, 133–176.

[24] Mori, S., Mukai, S., Classification of Fano 3-folds with B2≥2. Manuscripta Math. 36 (1981/82), no. 2, 147–162.

[25] Mori, S., Mukai, S., Extremal rays and Fano 3-folds. The Fano Conference, 37–50, Univ. Torino, Turin, 2004.

[26] Mukai, S., Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 86 (1989), no. 9, 3000–3002.

[27] Novelli, C., On Fano manifolds with an unsplit dominating family of rational curves, Kodai Math. J. 35 (2012), no. 3, 425–438. https://doi.org/10.2996/kmj/1352985447

[28] Novelli, C., On Fano manifolds of large pseudoindex, J. Algebra 449 (2016), 138–162. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.10.012

[29] Novelli, C. (2019). Blow-ups and Fano manifolds of large pseudoindex. MATHEMATICA SCANDINAVICA, 124(1), 34-50. https://doi.org/10.7146/math.scand.a-109996

[30] Novelli, C. and Occhetta, G., Ruled Fano fivefolds of index two, Indiana Univ. Math. J. 56 (2007), no. 1, 207–241. https://doi.org/10.1512/iumj.2007.56.2905

[31] Novelli, C. and Occhetta, G., Rational curves and bounds on the Picard number of Fano manifolds, Geom. Dedicata 147 (2010), 207–217. https://doi.org/10.1007/s10711-009-9452-4

[32] Occhetta, G., A characterization of products of projective spaces, Canad. Math. Bull. 49 (2006), no. 2, 270–280. https://doi.org/10.4153/CMB-2006-028-3

[33] Wiśniewski, J. A., On a conjecture of Mukai, Manuscripta Math. 68 (1990), no. 2, 135–141. https://doi.org/10.1007/BF02568756

[34] Wiśniewski, J. A., On contractions of extremal rays of Fano manifolds, J. Reine Angew. Math. 417 (1991), 141–157. https://doi.org/10.1515/crll.1991.417.141